Vollständigere Fortsetzung
des
Versuchs
in
socratischen Gesprächen
über die
wichtigsten Gegenstände
der
ebenen Geometrie.

Von

Johann Andreas Christian Michelsen,
Professor der Mathematic und Physic am vereinigten
Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium.

Zweyter Band.

Berlin
bey Sigismund Friedrich Hesse,
in der breiten Straße.
1784.

Vorrede.

In diesem Bande ist nicht nur alles das enthalten, was aus der Lehre von der Gleichheit der ebenen Figuren noch übrig war; sondern er begreift auch die wichtigsten Sätze von der Proportionalität gerader Linien und also auch die Vorbereitung zur Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren. Ohnerachtet ich beschlossen hatte, wenigstens die ganze Planimetrie auf eine ähnliche Art zu bearbeiten, und ohnerachtet es mir nicht an Ermunterungen zur Fortsetzung fehlt; so halte ich es doch aus mehrern Gründen für besser, den gefaßten Vorsatz fahren zu lassen, und die Behandlung der Geometrie in Gesprächen mit diesem Bande zu endigen. Es hat diese Behandlungsart allerdings

ihre Vortheile; davon bin ich durch das Zeugniß derer überzeugt, die bey der Erlernung der Geometrie sich meiner Versuche mit bedient haben: allein sie hat auch ihre Unbequemlichkeiten, wovon eine in der unvermeidlichen Weitläuftigkeit besteht, und dazu kommt, daß in der Folge, wenn man nicht fast unaushaltbar weitläuftig werden will, in den gegangenen Wegen nicht mehr die Mannigfaltigkeit statt finden kann, die man denselben anfänglich zu geben im Stande ist. Wem an jenen Vortheilen gelegen ist, der wird dieselben durch den Gebrauch der nunmehr gelieferten Versuche erhalten können, und ich halte es daher für besser, das aus der Geometrie noch übrige zwar so zu bearbeiten, daß dabey die bisherigen Versuche vorausgesetzt, und das darin enthaltene benutzt und weiter ausgeführt werde; aber doch nicht mehr

mehr in Gesprächen, sondern auf eine kürzere Art im zusammenhangenden Vortrage. Dies ist daher mein Vorsatz; doch erkläre ich mich hier nicht weiter über die Art, wie ich ihn ausführen werde, weil man die Beschaffenheit einer Arbeit, bevor sie ganz zu Stande gebracht ist, selten genau zu beschreiben vermag. Das doppelte Verzeichniß, welches ich dem gegenwärtigen Bande angehängt habe, und wovon das zweyte nachweiset, wo die in den ersten vier Büchern der euclidischen Elemente vorkommenden Sätze in den Versuchen ꝛc. enthalten sind, wird hoffentlich einem jeden, der diese Versuche gebraucht, angenehm seyn, weil ohne dergleichen Verzeichnisse das Wiederfinden des Gelesenen, in einem solchen Buche vorzüglich, schwer ist. Uebrigens hoffe und wünsche ich, daß man bey der Beurtheilung meiner Versuche darauf

gütige Rücksicht nehme, daß ich dieselben nicht nur für Anfänger, sondern selbst für junge Anfänger geschrieben habe, und daß sie meiner ersten und öftern Erklärung nach nur Versuche in dieser Behandlungsart der Geometrie seyn sollen. Finden sie ferner die gütige Aufnahme, welche sie bisher zu erhalten so glücklich gewesen sind, so wird es für mich eine sehr angelegentliche Beschäftigung seyn, alle darüber gefällten Urtheile auf das sorgfältigste zu nutzen, um ihnen bey einer künftigen Umarbeitung mehrere Vollkommenheit zu geben.

Berlin,
den 20sten April 1784.

Funfzehntes Gespräch.

1. Nunmehr müssen wir suchen, das, was wir von dem Kreise gelernt haben, zur Erweiterung unserer von den übrigen Figuren vorher schon erworbenen Kenntnisse anzuwenden. Wenn wir dieses thun werden, so findet sich vielleicht dabey Gelegenheit, auch von dem Kreise selbst noch verschiedenes zu lernen. Es macht aber die angeführte Absicht nothwendig, daß wir die Kreise und die Figuren, welche wir durch den Kreis näher kennen lernen wollen, in Verbindung unter einander betrachten; so wie wir, nachdem wir die Parallelogramme an sich kennen gelernt hatten, dieselben mit Dreyecken verglichen, und dadurch neue Eigenschaften der Dreyecke fanden. Allein wenn stehen nun die ebenen geradlinigen Figuren mit einem Kreise in einer solchen Verbindung, daß sie sich mit demselben vergleichen lassen? Parallelogramme und Dreyecke waren auf diese Art mit einander verbunden, wenn sie einerley oder gleiche Grundlinien hatten, und zwischen einerley Parallelen gelegt werden konnten. Verhält es sich etwa mit den geradlinigen Figuren und dem Kreise auch so?

S. Mich dünkt nicht. Denn von einem Kreise kann man eigentlich nicht sagen, daß er auf einer Grundlinie stehe oder dergleichen habe; oder man müßte seinen Durchmesser zur Grundlinie annehmen.

L. In so fern der Durchmesser eines Kreises diejenige Linie ist, aus welcher der ganze Kreis erkannt werden kann, läßt sich derselbe allerdings als die Grundlinie des Kreises betrachten, und wenn künftig von geradlinigen Figuren gesprochen werden wird, die mit einem Kreise einerley Grundlinie haben, so soll damit jedesmal gesagt werden, daß die Grundlinie der geradlinigen Figur und der Durchmesser des Kreises gleich sind.

S. Wenn das ist, so stehen geradlinige Figuren und Kreise eben so wie die Parallelogramme und Dreyecke in einer solchen Verbindung, daß sie mit einander verglichen werden können, wenn sie einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen gelegt werden können.

L. Ganz recht. Allein es giebt hier auch noch eine andere Verbindung, und diese findet statt, wenn entweder die geradlinige Figur in oder um den Kreis, oder der Kreis in oder um die geradlinige Figur beschrieben ist. Da diese Ausdrücke noch nicht vorgekommen sind, so müssen wir uns zuvörderst den Sinn derselben deutlich zu machen suchen. Betrachten Sie also die 1te, 2te, 3te und 4te Figur.

Da-

Dadurch daß geradlinige Figuren in oder um einen Kreis beschrieben sind, sollen wir in den Stand gesetzt seyn, beyde mit einander zu vergleichen. Wird das wohl statt finden können, wenn eine geradlinige Figur so in oder um einen Kreis beschrieben ist, als es die 1te und 2te Figur vorstellt?

S. Nein, denn auf diese Art hat die innerhalb der andern beschriebene Figur nie eine bestimmte Größe, und es ist also nicht möglich, sie mit der andern weiter zu vergleichen, als daß man sagt, sie sey kleiner als die um sie beschriebene.

L. Wie also, wenn es sich so verhält, als es die 3te und 4te Figur vorstellt?

S. Hier scheint mir eine Vergleichung möglich zu seyn, ob ich gleich noch nicht sehe wie.

L. In der 3ten Figur wäre also in dem Verstande, als wir diese Redensart gebrauchen wollen, ein Dreyeck in einem Kreis und ein Kreis um ein Dreyeck beschrieben. Wenn könnte man also nach derselben von einem Dreyecke behaupten, daß es in einen Kreis beschrieben sey?

S. Wenn alle Winkelspitzen des Dreyecks in dem Umfange des Kreises liegen.

L. Und wenn wäre ein Kreis um ein Dreyeck beschrieben?

S. Wenn sein Umfang durch alle Winkelspitzen des Dreyecks geht.

L. Ist Fig. 5. das daselbst befindliche Viereck auch in den Kreis oder der Kreis um das Viereck beschrieben?

S. Nein, denn die Spitze des einen Winkels des Vierecks liegt nicht in dem Umfange des Kreises.

L. Wenn ist also überhaupt eine geradlinige Figur in einen Kreis beschrieben?

S. Wenn alle Winkelspitzen derselben in dem Umfange des Kreises liegen.

L. Und wenn ist überhaupt ein Kreis um eine geradlinige Figur beschrieben?

S. Wenn sein Umfang durch alle Winkelspitzen der geradlinigen Figur geht.

L. Ferner ist in der 4ten Figur ein Kreis in eine geradlinige Figur, nemlich in ein Dreyeck, und das Dreyeck um den Kreis beschrieben. Was gehört also nach dieser Figur dazu, wenn ein Kreis in ein Dreyeck beschrieben seyn soll?

S. Daß der Kreis mit jeder Seite des Dreyecks einen Punkt gemein habe, oder eine jede Seite desselben berühre.

L. Und was wird erfordert, wenn ein Dreyeck um einen Kreis beschrieben seyn soll?

S. Daß alle Seiten desselben den Kreis berühren.

L. Ist Fig. 6. das daselbst befindliche Viereck um den Kreis beschrieben?

S. Nein, denn die eine Seite desselben berührt den Kreis nicht.

L. Also ist daselbst auch wohl der Kreis nicht in das Viereck beschrieben?

S. Nein, denn er berührt die eine Seite desselben nicht.

L. Wenn ist also überhaupt ein Kreis in eine geradlinige Figur beschrieben?

S. Wenn der Umfang desselben eine jede Seite der geradlinigen Figur berührt.

L. Und wenn ist überhaupt eine geradlinige Figur um einen Kreis beschrieben?

S. Wenn alle Seiten derselben den Umfang des Kreises berühren.

L. In diesem Verstande werden nun die Redensarten: Eine geradlinige Figur ist in oder um einen Kreis beschrieben; und: Ein Kreis ist in oder um eine geradlinige Figur beschrieben; in der Folge beständig gebraucht werden. Es findet also eben das bey ihnen statt, was so oft bey wissenschaftlichen Ausdrücken und Redensarten sich findet, daß sie nemlich in einer eingeschränktern Bedeutung genommen werden, als sie dem Wortverstande nach oder im gemeinen Leben haben. So wie nun eine geradlinige Figur und ein Kreis nach dem bisherigen verbunden werden können, eben so kann man eine geradlinige Figur mit einer andern in Verbindung setzen. Was wird also die Redensart sagen wollen: Eine geradlinige Figur ist in eine andere geradlinige Figur beschrieben?

S. Daß jede Winkelspitze der einen geradlinigen Figur in einer Seite der andern Figur liegt.

L. Und wenn wird eine geradlinige Figur um eine andere beschrieben seyn?

S. Wenn eine jede Seite derselben durch eine von den Winkelspitzen der andern Figur geht.

L. Auch spricht man bisweilen von Linien, die in einen Kreis getragen oder gelegt sind. Was scheint Ihnen dazu erfordert zu werden?

S. Daß ihre Endpunkte in dem Umfange des Kreises liegen, wie hier. Fig. 7. (Eine ähnliche Figur zeichnet nemlich der Schüler und zeigt sie.)

L. Dies alles vorausgesetzt, so frägt sich nun zuvörderst, ob man wohl im Stande sey, eine jede gegebene gerade Linie, so groß sie auch sey, in einen jeden Kreis zu legen?

S. Das kann man nicht. Denn wenn eine gerade Linie in einen Kreis gelegt seyn soll, so müssen ihre Endpunkte in dem Umfange des Kreises liegen. Das ist aber unmöglich, sobald die dazu gegebene gerade Linie größer ist, als der Durchmesser des Kreises; denn der Durchmesser des Kreises ist unter den Linien, die in einem Kreise gezogen werden können, die größte.

L. Was ist also, wenn eine gegebene gerade Linie in einen Kreis gelegt werden soll, vor allen Dingen für eine Bedingung nöthig?

S.

S. Daß dieselbe nicht größer sey, als der Durchmesser des gegebenen Kreises.

L. Gesetzt nun, daß Ihnen der Kreis Fig. 9, dessen Durchmesser AD ist, und die gerade Linie AB Fig. 8, welche kleiner als der Durchmesser AD ist, gegeben wäre, damit Sie die Linie AB in den gedachten Kreis legten; wie würden Sie das machen?

S. Ich beschriebe aus einem Punkte des Umfanges des gegebenen Kreises z. B. aus A, mit einem der gegebenen geraden Linie gleichen Halbmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in B schnitte, und zöge von dem zuerst angenommenen Punkte nach dem Schneidungspunkte B eine gerade Linie. Diese gerade Linie wäre ein Durchmesser des zweyten Kreises, und also der gegebenen gleich; auch liegen ihre beyden Endpunkte in dem Umfange des ersten Kreises, und es wäre also dem Verlangten durch sie ein Genüge geschehen.

L. Nun zum andern die Frage: läßt sich wohl um ein jedes Dreyeck ein Kreis beschreiben?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja. Denn da der Kreis, der um das Dreyeck beschrieben werden soll, mit seinem Umfange nur durch drey Winkelspitzen zu gehen braucht, und durch jede drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, welches bey den Winkelspitzen eines Dreyecks ebenfalls statt findet, ein Kreis gelegt werden kann; so kann um

ein jedes Dreyeck ein Kreis beschrieben werden.

L. Und wie würden Sie es anfangen, wenn Sie es wirklich thun sollten?

S. Ich würde zwey von den Seiten eines Dreyecks in zwey gleiche Theile theilen, aus den Theilungspunkten senkrechte Linien auf denselben errichten, und diese nach der Seite, wo sie zusammen liefen, so weit verlängern, bis sie sich schnitten. Aus diesem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von irgend einer Winkelspitze des gegebenen Dreyecks einen Kreis beschrieben, so müßte derselbe durch alle Winkelspitzen dieses Dreyecks gehen, und wäre also um dasselbe beschrieben. Z. B. (Der Schüler zeichnet jetzt die 11te Figur.)

L. Müssen denn die gedachten senkrechten Linien aber auch jederzeit auf einer Seite zusammen laufen?

S. Ja. Denn wenn man Fig. 12 die Linie DE zieht; so ist

$FEA = R$ und

$FDA = R$, folglich

$FED = FEA - DEA < R$ und

$FDE = FDA - EDA < R$; also

$FED + FDE < 2R$, und also müssen die Linien FE und FD auf der Seite der Winkel FED und FDE endlich zusammen kommen.

L. Wird man nun aber auch wohl um eine jede andere geradlinige Figur einen Kreis beschreiben können?

S.

S. Nein, denn nur durch jede drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich ein Kreis legen. Wenn nun ein Kreis um ein Viereck, Fünfeck, Sechseck u. s. w. beschrieben werden soll; so muß er durch vier, fünf, sechs Punkte u. s. w. gelegt werden, und das ist nicht allezeit möglich.

L. Erinnern Sie sich wohl noch daran, daß wir uns schon einmal über Vierecke unterredet haben, deren Winkelspitzen insgesammt in dem Umfange eines Kreises lagen?

S. O ja; wir haben dabey den Satz gehabt, daß darin jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen 2 R ausmachen.

L. Ein solches Viereck nun angenommen, so ist zuvörderst offenbar, daß man einen Kreis beschreiben könne, der durch die Spitzen dreyer Winkel desselben gehe. Gesetzt nun, daß dieser Kreis nicht auch durch die Spitze des vierten Winkels gienge; würden alsdann wohl jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen, so groß als zwey rechte Winkel seyn können? Ueberlegen Sie solches nach der 13ten Figur. Wenn daselbst in dem Viereck ABCD die Winkel BAD + DCB = 2 R sind; können alsdann wohl BAD + DEB in dem Viereck ABED = 2 R seyn?

S. Nein, denn sonst müßte DCB = DEB seyn, und DCB ist größer als DEB, weil DCB ein äusserer und DEB ein innerer gegenüber

über stehender Winkel in dem Dreyecke CEB ist, dessen Seite EC verlängert worden.

L. Und wenn BAD + DEB = 2 R; können dann BAD + DCB = 2 R seyn?

S. Ebenfalls nicht, und zwar aus eben dem Grunde.

L. Kann also, wenn man durch drey Winkelspitzen eines Vierecks, dessen jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen 2 R ausmachen, einen Kreis legt, derselbe nicht durch die vierte Winkelspitze gehen?

S. Nein, sondern er muß auch durch die vierte gehen. Denn wäre das nicht, und fiele die vierte Winkelspitze in den Kreis, so würde dieser Winkel mit seinem gegenüber stehenden zusammen genommen $>$ 2 R seyn. Denn in der Figur ist

DAB + DEB = 2 R, welches sonst schon bewiesen worden, und

BCD $>$ DEB; also ist

DAB + BCD $>$ 2 R.

L. Wie dann aber, wenn die vierte Winkelspitze ausserhalb des Kreises fiele?

S. Dann wäre dieser Winkel mit seinem gegenüber stehenden zusammen genommen kleiner als 2 R. Denn gienge in der 13ten Figur der Kreis nicht durch E, sondern durch C; so wäre

DAB + DCB = 2 R, und

DEB $<$ DCB, also

DAB + DEB $<$ 2 R.

L.

L. Um was für Vierecke läßt sich also ein Kreis beschreiben?

S. Um alle diejenigen, darin jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen 2 R gleich sind.

L. Um was für Parallelogramme also?

S. Um das Quadrat und das Rechteck.

L. Um die schiefwinkligen Parallelogramme also nicht?

S. Nein; denn wenn das möglich wäre, so müßten in den schiefwinkligen Parallelogrammen jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen so groß als 2 R seyn, und das können sie als schiefe Winkel nicht, da in jedem Parallelogramme die gegenüber stehenden Winkel immer einander gleich sind.

L. Unter den Dreyecken giebt es also keins, um welches man nicht einen Kreis beschreiben könnte; unter den Vierecken ist solches nur bey drey Arten möglich, nemlich bey dem Quadrate, bey dem Rechtecke, und bey den Trapezien, worin jede zwey gegenüber stehende Winkel so groß als zwey rechte Winkel sind. Bey den vieleckigen Figuren ist es bey noch weniger Arten möglich, darum einen Kreis zu beschreiben. Doch hievon erst nachher ein mehreres. Die Art, wie um ein gegebenes Viereck, wobey solches möglich ist, ein Kreis beschrieben werde, habe ich übrigens nicht nöthig zu berühren, indem man, um solches zu thun, nur durch die Spitzen

dreyer Winkel desselben einen Kreis zu legen hat. Also nun weiter zu der Frage: läßt sich in ein jedes Dreyeck ein Kreis beschreiben?

S. Diese Frage bin ich noch nicht im Stande zu beantworten.

L. So leicht, als auf die vorhergehende Frage bietet sich auch hier die Antwort nicht dar, und wir werden also suchen müssen. So viel fällt indeß in die Augen, daß man, um in ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben, nur den Mittelpunkt zu wissen brauche. Denn weiß man diesen, so ist die von ihm auf irgend einer Seite des Dreyecks gezogene senkrechte Linie der Halbmesser des verlangten Kreises, indem der mit dieser Linie aus dem gedachten Punkte beschriebene Kreis alle Seiten des Dreyecks berühren muß, so bald es möglich ist, darinn einen Kreis zu beschreiben. Stellen Sie sich also vor, daß Sie in das Dreyeck ABC Fig. 14 einen Kreis beschreiben sollten, und der Mittelpunkt dieses Kreises D gegeben wäre; was würden Sie thun?

S. Ich zöge von D nach AC oder BC oder BA eine senkrechte Linie, und beschriebe aus D mit dieser Linie einen Kreis.

L. Wenn Sie aus D nach jeder Seite des Dreyecks senkrechte Linien zögen, wie Fig. 15, und eine von denselben zum Halbmesser annähmen, so müßten doch dann, wenn der Kreis durch E, F und G gehen, und die Seiten des Dreyecks in diesen Punkten berühren sollte,

diese

diese senkrechten Linien DE, DF und GE unter einander gleich seyn. Nicht?

S. Ja.

L. Wenn nun dies wäre, und man ferner die Linien DC, DB und DA zöge, wie Fig. 16 geschehen ist; was fände dann statt?

S. (Nach einigem Nachdenken) Dann wäre

1. $\triangle DEC = \triangle DFC$
2. $\triangle DFB = \triangle DGB$ und
3. $\triangle DGA = \triangle DEA$. Denn es wäre

1. $\triangle DEC = \triangle DFC$, weil
   $DE = DF$
   $DC = DC$ und
   $DEC = DFC = R$. Ferner wäre
2. $\triangle DFB = \triangle DGB$, weil
   $DF = DG$
   $DB = DB$ und
   $DFB = DGB = R$. Endlich wäre
3. $\triangle DGA = \triangle DEA$, weil
   $DG = DE$
   $DA = DA$ und
   $DGA = DEA = R$.

L. Gut. Allein was folgte nun hieraus für die Winkel, in welche die Winkel des Dreyecks ABC durch die Linien DC, DA und DB getheilt worden sind?

S. Für diese Winkel folgt

1. daß $DCE = DCF$
2. - - $FBD = DBG$ und
3. - - $GAD = DAE$.

L. Gesetzt nun, daß wir in dem Dreyecke ABC Fig. 14 den Punkt D nicht als bekannt annähmen, dagegen aber zuvörderst zwey Winkel desselben z. B. C und B in zwey gleiche Theile theilten; würden dann die beyden Theilungslinien, gehörig verlängert, nicht endlich in dem Dreyecke zusammen kommen müssen?

S. Ja, denn da die Winkel, welche beyde mit der Linie BC machen würden, kleiner wären, als die Winkel BCA und ABC; so müßten sie auch noch eher als die Linien CA und BA und also innerhalb des Dreyecks zusammen kommen.

L. Zögen wir ferner aus diesem Zusammenkunfts- oder Schneidungspunkte senkrechte Linien nach AC, BC und AB wie Fig. 17, so wüßten wir?

S. Erstlich daß

△ EDC = △ FDC, weil
DC = DC
CED = CFD = R und
ECD = FCD, weil ECF in zwey gleiche Theile getheilt werden.

Zweytens wäre

△ FDB = △ GDB, weil
DB = DB
DFB = DGB = R
DBF = DBG, weil GBF in zwey gleiche Theile getheilt werden.

L. Und was folgte daraus für die Linien DE, DF und DG?

S. Daß DE = DF = DG, denn es ist
1. DE = DF
2. DF = DG also auch
3. DE = DG oder
DE = DF = DG.

L. Und aus D also mit DE oder DF oder DG einen Kreis beschrieben, so würde derselbe nicht nur durch E, F und G gehen, sondern auch die Seiten des Dreyecks ABC in diesen Punkten berühren. Denn DE, DF und DG wären Halbmesser dieses Kreises und DEC = DFB = DGA = R. Nun werden Sie im Stande seyn die Frage zu beantworten: Wie beschreibt man in ein gegebenes Dreyeck einen Kreis?

S. Man theilt zwey Winkel desselben in zwey gleiche Theile und verlängert die Theilungslinien, bis sie sich schneiden. Ferner fällt man aus diesem Schneidungspunkte auf eine der Seiten des Dreyecks eine senkrechte Linie, und beschreibt mit derselben aus dem gedachten Schneidungspunkte einen Kreis.

L. Ist dies Verfahren nun nur bey einem, oder bey allen Dreyecken möglich?

S. Bey allen.

L. Läßt sich also in ein jedes Dreyeck ein Kreis beschreiben?

S. Ja.

L. Der Weg, den wir gegangen sind, um die Art und Weise, in ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben, zu finden, ist sehr merkwürdig, weil er in sehr vielen und wichtigen Fällen mit Vortheil betreten werden kann. Das wesentliche bey demselben ist: Man betrachtet das Unbekannte als bekannt, und sucht das auf, was mit ihm unzertrennlich verbunden ist, und zwar so lange, bis man auf etwas bekanntes kommt. Ist man bis dahin gelangt, so geht man denselben Weg rückwärts, und leitet dann das Unbekannte aus dem Bekannten her. In der Folge wollen wir ihn noch öfter gehen, und je öfter Sie ihn gehen werden, desto leichter wird er Ihnen werden. — Ob sich denn nun aber auch wohl in ein jedes Viereck ein Kreis beschreiben läßt?

S. Vielleicht eben so wenig, als sich um jedes Viereck ein Kreis beschreiben läßt. Ich sage aber vielleicht, denn mit Gewißheit kann ich darüber nicht urtheilen.

L. Wir wollen also untersuchen. Gesetzt also, daß Sie in das Rechteck ABCD Fig. 18 einen Kreis beschreiben sollten; wie würden Sie es anfangen?

S. Ich theilte auch hier zwey Winkel z. B. B und C Fig. 19 in zwey gleiche Theile, und verlängerte die Theilungslinien, bis sie sich in E schnitten. Dann zöge ich aus E auf die Seiten des Parallelogramms die senk-

rechten

rechten Linien EF, EH, EI und EG und beschriebe aus E mit einer von denselben einen Kreis.

L. Wie müßten aber die Linien EF, EH, EI und EG beschaffen seyn, wenn dieser Kreis alle Seiten des Parallelogramms ABCD berühren sollte?

S. Alle einander gleich.

L. Werden Sie das bey einem jeden Rechtecke seyn?

S. (Nach einigem Nachdenken) Nein. Zwar sind jederzeit drey dieser Linien, z. B. Fig. 19. EF, EH und EG einander gleich. Denn da die Winkel B und C in zwey gleiche Theile getheilt sind; so ist sowol

HBE = EBF als

ECF = ECG, und da

HBC = BCG = R; so ist

HBE = EBF = ECF = ECG = $\frac{1}{2}$ R.

Da nun ferner

EHB = BFE = EFC = CGE = R und

in den Dreyecken EHB und EBF

EB = EB; ferner

in den Dreyecken EBF und EFC

EF = EF, und endlich

in den Dreyecken EFC und ECG

EC = EC; so ist

△ EHB = △ EBF = △ EFC = △ ECG,

und also auch

EH = EF = EG. Allein EI ist nur dann diesen Linien gleich, wenn EF = $\frac{1}{2}$ AB.

Denn es ist EF = HB als Parallelen zwischen Parallelen, und EI = AH aus eben dem Grunde. Soll also EI = EF seyn, so muß auch AH = HB = EF = $\frac{1}{2}$ AB seyn.

L. Und wann würde dies wohl statt finden?

S. (Denkt zuvor abermals eine Zeitlang nach) Wenn die Linie AB = BC oder die ganze Figur ein Quadrat wäre. Denn wenn EF = $\frac{1}{2}$ AB wäre, so müßte auch EH = EF = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ AB und also auch BC = AB seyn.

L. Das wüßten wir also nunmehr, daß sich in ein Quadrat ein Kreis beschreiben ließe, und auch, daß sich das Verfahren dabey von dem bey gleicher Absicht nöthigen Verfahren beym Dreyecke nicht unterschiede. In ein Rechteck kann man bloß einen Kreis beschreiben, der drey Seiten desselben berührt, aber man muß alsdann die beyden Winkel, die an der kleinern Seite liegen, in zwey gleiche Theile theilen. Denn theilt man die Winkel, die an einer der größern Seiten liegen, in zwey gleiche Theile, so ist es nicht nothwendig, daß der Vereinigungspunkt der Theilungslinien innerhalb der Figur falle, und noch weniger wird der alsdann zu beschreibende Kreis ganz innerhalb des Rechtecks fallen. Läßt sich nun nicht einmal in ein Rechteck, um welches doch jederzeit ein Kreis beschrieben werden kann, ein Kreis beschreiben; so ist zu vermuthen, daß noch weniger in ein schiefwinkliges Parallelogramm und noch weniger in eine jede vielseitige

seitige Figur ein Kreis werde beschrieben werden können. Mit Gewißheit sollen Sie indeß in der Folge erst hierüber urtheilen lernen, und in der nächsten unserer Unterredungen wollen wir uns daher mit einer andern Materie beschäftigen.

Sechszehntes Gespräch.

1. In unserer lezten Unterredung haben wir die Frage untersucht: Ob man um und in eine jede geradlinige Figur einen Kreis beschreiben könne? Heute müssen wir uns mit der beschäftigen: Ob man in oder um jeden Kreis eine jede geradlinige Figur beschreiben könne? Was meynen Sie dazu? Bey der vorhergehenden Frage blieben die geradlinigen Figuren, in oder um welche der Kreis beschrieben werden sollte, unverändert; bey der gegenwärtigen ist der Kreis gegeben, den Sie sich also von einer bestimmten Größe gedenken müssen.

S. Wenn das ist, so ist man nicht einmal im Stande, ein jedes Dreyeck in einem Kreis zu beschreiben. Denn wenn ein Dreyeck in einem Kreis beschrieben seyn soll, so müssen die Endpunkte aller Seiten desselben in dem Umfange des Kreises liegen. Sobald nun eine oder mehrere von diesen Seiten größer

sind, als der Durchmesser des gegebenen Kreises, so ist das Verlangte unmöglich.

L. Sollte nicht auch die zu große Kürze der Seiten ein Hinderniß seyn können?

S. Ebenfalls. Denn sind die Seiten des Dreyecks zu klein, so fällt, wenn man eine Seite desselben in den Kreis gelegt hat, der eine Winkel innerhalb des Kreises, aber seine Winkelspitze nicht in den Umfang des Kreises.

L. Und doch kann man jedes Dreyeck in und um einen jeden gegebenen Kreis beschreiben.

S. Wie ist das möglich?

L. Bey den Kreisen, die in oder um eine geradlinige Figur beschrieben wurden, bestimmten wir die Größe dieser Kreise nicht. Eben so wird auf die Größe der Dreyecke und überhaupt der geradlinigen Figuren, die in oder um einen gegebenen Kreis beschrieben werden sollen, nicht gesehen, wofern nur die übrigen Eigenschaften beybehalten werden. Hiebey kommts nur auf die Winkel an, und eine gegebene geradlinige Figur in oder um einen gegebenen Kreis beschreiben, heißt daher nichts anders, als in oder um den gegebenen Kreis eine eben so vielseitige geradlinige Figur beschreiben, deren Winkel den Winkeln der gegebenen Figur, stückweise genommen, gleich sind. Scheint es Ihnen nun noch eben so unmöglich, wenigstens ein jedes Dreyeck in oder um einen jeden gegebenen Kreis zu beschreiben?

S. Nun freylich nicht mehr. Allein ehe ich die Art und Weise, wie beydes geschieht, nicht verstehe, will ich doch nicht beurtheilen, ob es in einem jeden Falle möglich ist.

L. Fig. 20 ist ein Dreyeck und Fig. 21 ein Kreis gezeichnet. Versuchen Sie einmal in den Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, welches eben die Winkel habe, als das Dreyeck ABC Fig. 20.

S. (Nach einigem Nachdenken) Noch sehe ich nicht, wie dies zu machen ist; wenn ich nur eine Figur hätte, worin solches schon geschehen wäre!

L. Hier Fig. 3 ist eine, wo ein Dreyeck in einen Kreis beschrieben ist. Was sind dadurch, daß das Dreyeck in den Kreis beschrieben ist, die Winkel des Dreyecks geworden?

S. Winkel am Umkreise.

L. Oder Winkel in Abschnitten; nicht?

S. Ja.

L. In was für einem Abschnitte liegt der Winkel A?

S. In dem Abschnitte BAC.

L. Und der Winkel B?

S. In dem Abschnitte ABC.

L. Und der Winkel C?

S. In dem Abschnitte BCA.

L. Wie also, wenn ich Ihnen in dem Kreise Fig. 21 auf eine ähnliche Art die Abschnitte machte, worin die Winkel den Winkeln des Fig. 20 gegebenen Dreyecks gleich wären?

S. Dann wäre in dem Kreise auch das verlangte Dreyeck beschrieben.

L. Was haben Sie also zu thun, um das Dreyeck Fig. 20 in den Kreis Fig. 21 zu beschreiben?

S. In diesem Kreise drey Abschnitte zu machen, worin die Winkel den Winkeln des gegebenen Dreyecks gleich sind. — — Ich ziehe also zuvörderst an den gegebenen Kreis wie Fig. 22 eine Tangente DE für den Punkt F und lege an diesen Punkt F zwey Winkel, welche zweyen Winkeln in dem gegebenen Dreyecke gleich sind, verlängere die einen Schenkel derselben bis zum Umfange des Kreises, und ziehe zwischen den Endpunkten derselben eine gerade Linie. So ist geschehen, was verlangt wurde. In Fig. 22 ist nemlich

DFH = CBA Fig. 20 und
EFG = BAC Fig. 20 gemacht, so daß also dadurch
HFG = BCA geworden. Nun ist, da FE eine Tangente des Kreises und FH und FG aus dem Berührungspunkte gezogene Secanten desselben sind
DFH = HGF und
EFG = GHF; folglich ist auch
CBA = HGF (= DFH) und
BAC = GHF (= EFG) und also das Dreyeck GHF Fig. 22 mit dem Dreyecke ABC Fig. 20 gleichwinklig.

L.

L. Ist es also nun möglich, ein jedes Dreyeck in einen jeden Kreis zu beschreiben; oder möglich, in einen jeden Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, dessen Winkel stückweise den Winkeln eines andern Dreyecks gleich sind, wie dieses leztere auch immer beschaffen seyn möge?

S. Ja.

L. Aber wie verhält sichs nun mit der gedachten Beschreibung eines Dreyecks um einen gegebenen Kreis? Fig. 23 ist ein Dreyeck um einen Kreis, dessen Mittelpunkt K beschrieben, seine Winkel sind den gleichnamigen Winkeln des Dreyecks Fig. 20 gleich, und die Berührungspunkte sind D, F und E.

S. Wenn ich also die Linien KD, KE und KF ziehe, Fig. 24; so stehen selbige auf AC, AB und BC senkrecht. Allein wozu hilft mir das?

L. Sie erhalten dadurch wenigstens drey Vierecke, deren Winkel Sie bestimmen können.

S. Die Vierecke sehe ich wohl; sie sind DKFC, BFKE und EKDA. Allein noch weiß ich nicht, wie ich die Winkel soll bestimmen können?

L. Wie groß sind alle vier Winkel in einem geradlinigen Vierecke?

S. So groß als 4 R.

L. Und wenn nun zwey darunter jeder = R und also beyde = 2 R sind; wie groß sind dann die beyden übrigen Winkel zusammen genommen?

S. Nun verstehe ich es schon. Da KD auf AC, KF auf BC und KE auf AB senkrecht und also

KDA = KDC = KFC = KFB = KEB = KEA = R; so ist

KDC + KFC = 2 R
KFB + KEB = 2 R und
KEA + KDA = 2 R; also auch
DKF + DCF = 2 R
EKF + EBF = 2 R und
EKD + EAD = 2 R.

L. Also DKF allein genommen?

S. Gleich 2 R — DCF.

L. Und EKF allein genommen?

S. Gleich 2 R — EBF.

L. Und endlich EKD allein genommen?

S. Gleich 2 R — EAD.

L. Wenn nun, wie angenommen worden, in Fig. 24 und 20 die gleichnamigen Winkel gleich sind, und Sie die Winkel DKF, EKF EKD mit den Winkeln in dem Dreyecke ABC Fig. 20 vergleichen wollten; was würden Sie dann behaupten können?

S. (Nach einigem Nachdenken) Daß

1. DKF = A + B
2. EKF = A + C und
3. EKD = B + C. Denn DKF ist sowol als A + B = 2 R — C, und EKF sowol als A + C = 2 R — B und EKD sowol als B + C = 2 R — A.

L.

L. Sollten Sie nach diesem allen nicht im Stande seyn, die Art und Weise zu beschreiben, wie man um einen gegebenen Kreis ein Dreyeck beschreibe, dessen Winkel stückweise den Winkeln eines gegebenen Dreyecks gleich sind?

S. (Nach einigem Nachdenken) Man zieht zuvörderst in dem gegebenen Kreise einen Halbmesser und legt daran in dem Mittelpunkte auf der einen Seite einen Winkel, welcher so groß ist als ein Paar von den Winkeln des gegebenen Dreyecks zusammen genommen, und auf der andern ebenfalls einen Winkel, der einem andern Paare der Winkel des gegebenen Dreyecks zusammen genommen gleich ist, und zieht darauf durch die dadurch in dem Umfange des Kreises bemerkten Punkte Tangenten, die man so weit verlängert, bis je zwey und zwey sich einander schneiden. Sollte z. B. das Dreyeck ABC Fig. 20 erst um den Kreis Fig. 24 beschrieben werden; so würde ich zuvörderst KD ziehen; dann in K an KD auf der einen Seite DKF = A + B und auf der andern Seite DKE = B + C legen, wodurch EKF = A + C ebenfalls erhalten würde; und endlich durch D, F und E Tangenten ziehen, und sie so weit verlängern, bis sie sich je zwey und zwey in C, B und A schnitten. Nun wäre Fig. 24 und 20

A = A

B = B und

C = C.

$C = C$. Denn da Fig. 24
$KDC = KFC = R$; so ist
$KDC + KFC = 2R$, und da
$KDC + KFC + DKF + C = 4R$, auch
$DKF + C = 2R$ und
$C = 2R - DKF$. Da nun
Fig. 20 - $C = 2R - (A+B)$ und
$DKF = A + B$, so ist auch
C Fig. 20 $= 2R - DKF$ und also
Fig. 20 und 24. $C = C$. Da ferner Fig. 24
$KFB + KEB = R$; so ist
$KFB + KEB = 2R$; und da
$KFB + KEB + EKF + B = 4R$, auch
$EKF + B = 2R$ und
$B = 2R - EKF$. Da nun Fig. 20
$B = 2R - (A+C)$ und
$EKF = A + C$; so ist auch
B Fig. 20 $= 2R - EKF$ und also
Fig. 20 und 24 $B = B$. Da nun in beyden Dreyecken Fig. 20 und 24, $C = C$ und $B = B$; so muß auch $A = A$, und also $EKD = B + C$ seyn.

L. Nunmehr sind Sie ohnstreitig im Stande zu sagen, ob man ein jedes gegebenes Dreyeck um einen jeden gegebenen Kreis beschreiben könne?

S. Ja, denn die Art, wie solches geschieht, ist bey allen Dreyecken anzuwenden.

L. Noch eins dabey zu berühren, so sagen Sie mir doch, wie Sie einen Winkel erhal-

ten,

ten, der so groß ist als zwey Winkel in einem gegebenen Dreyecke zusammen genommen.

S. Ich darf alsdann nur eine Seite des Dreyecks verlängern, um einen äussern Winkel zu erhalten. Hier z. B. Fig. 25, wo in dem Dreyecke ABC die Seite BC nach D und E verlängert worden ist

$$ABD = A + ACB \text{ und}$$
$$ACE = A + ABC.$$

L. Nun könnte ich zu dem aus der anfänglich aufgeworfenen Frage noch Uebrigen fortgehen, und Sie untersuchen lassen, ob man eben so als es bey den Dreyecken möglich ist, auch eine jede andere geradlinige Figur in oder um einen gegebenen Kreis beschreiben könne? und auch hier würde, ehe Sie ein Urtheil fällen könnten, die Art, wie solches geschehe, zuvörderst zu untersuchen seyn. Allein auch dies mag noch eine Zeitlang verschoben bleiben, und dagegen die Frage aufgeworfen werden: Wie man alles bisher, also nicht bloß das heute, sondern auch das in unserer lezten Unterredung, betrachtete verrichte, wenn das gegebene Dreyeck ein gleichseitiges ist? Oft findet man, wenn man das allgemeine auf besondere Fälle anwendet, für diese noch leichtere Regeln, und wir müssen also wenigstens versuchen, ob solches auch hier statt finden werde. Um stückweise zu gehen, so überlegen Sie zuvörderst den Fall, daß Sie um ein gleichseitiges Dreyeck einen Kreis beschreiben sollten.

S.

S. In einem gleichseitigen Dreyecke gehen die aus den Halbirungspunkten der Seiten senkrecht auf sie aufgerichteten Linien verlängert durch die diesen Seiten gegenüber stehende Winkel. Wenn man also darin zwey Seiten in zwey gleiche Theile getheilt hat, so braucht man, um den Mittelpunkt des Kreises zu finden, der um das Dreyeck beschrieben werden kann, nur von den Theilungspunkten nach den gegenüber stehenden Winkelspitzen gerade Linien zu ziehen. Der Durchschnittspunkt dieser Linien ist der gesuchte Mittelpunkt. Hier Fig. 26 ist dies angewandt.

L. Gesetzt nun, daß Sie in dies gleichseitige Dreyeck Fig. 26 einen Kreis beschreiben wollten?

S. Dann könnte ich auf eben dem Wege den Mittelpunkt dieses Kreises finden, und sein Halbmesser wäre auch sogleich gefunden. In der 26sten Figur wäre jetzt der gesuchte Mittelpunkt ebenfalls F und der erforderliche Halbmesser FE oder DE.

L. Wie nun aber, wenn ein gleichseitiges Dreyek in einen Kreis beschrieben werden sollte?

S. Dann brauchte ich nur einen Abschnitt des Kreises zu finden, und also auch nur einen Winkel an die in dieser Absicht gezogene Tangente zu legen, der so groß wäre, als der dritte Theil von 2 R. Diesen Winkel erhielte ich ferner, wenn ich nur eine Seite des gegebenen oder eines gleichseitigen Dreyecks verlän-

längerte, in dem auf diese Art entstandenen äussern Winkel. Hätte ich den einen Abschnitt erhalten, so legte ich seine Sehne aus ihren Endpunkten nur noch zweymal in den Kreis, und so wäre alles geschehen.

L. Und wenn Sie nun endlich ein gleichseitiges Dreyeck um einen Kreis beschreiben sollten?

S. Dann könnte ich die Punkte, wodurch die Tangenten gezogen werden müßten, auch auf eben die Art finden, als nach dem eben gesagten die Punkte gefunden werden, in welche die Winkelspitzen eines in den gegebenen Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreyecks zu liegen kommen.

L. So weit für dieses Mal. In unserer nächsten Unterredung können wir nun das von den Vierecken und Vielecken, die mit einem Kreise in Verbindung gesetzt werden können, was bisher nur gelegentlich und unvollkommen gesagt worden ist, eigentlich und genauer zu betrachten anfangen.

Siebenzehntes Gespräch.

L. Ich habe mich bereits mit Ihnen über die Art und Weise unterredet, sowol um ein jedes Viereck, worin jede zwey einander gegenüber stehende Winkel so groß als 2 R sind, einen Kreis zu beschreiben, als auch in einem Quadrate dasselbe zu verrichten. Wie ein

Vier-

Viereck in oder um einen Kreis beschrieben werde, davon habe ich aber noch nicht mit Ihnen gesprochen, und gleichwol sind, so bald eine geradlinige Figur mit einem Kreise in der jezt von uns zu betrachtenden Verbindung stehen soll, folgende vier Fragen nothwendig, so wie selbige auch bereits bey den Dreyecken beantwortet worden sind.

1. Wie beschreibt man einen Kreis um die gegebene geradlinige Figur?

2. Wie beschreibt man einen Kreis in die gegebene geradlinige Figur?

3. Wie beschreibt man eine gegebene geradlinige Figur in einen Kreis?

4. Wie beschreibt man eine gegebene geradlinige Figur um einen gegebenen Kreis?

Wir müssen also diese beyden lezten Fragen ebenfalls bey den Vierecken zu beantworten suchen. Vielleicht sind wir aber vorher auch noch im Stande, die auf die beyden ersten Fragen für die Vierecke gefundenen allgemeinen Antworten für die Quadrate eben so abzuändern, als wir solches bereits bey den Dreyecken für die gleichseitigen gethan haben.

Wie beschreibt man also einen Kreis um ein Quadrat?

S. Man legt nur durch die Spitzen dreyer Winkel des gegebenen Quadrats einen Kreis. Denn da in einem jeden Quadrate jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen 2 R ausmachen, so muß ein solcher Kreis

auch

auch durch die Spitze des 4ten Winkels gehen, und es wird also dadurch, daß man durch die Spitzen dreyer Winkel eines gegebenen Quadrats einen Kreis legt, ein Kreis um das Quadrat beschrieben.

L. Wie würden Sie es nun anfangen, um um das Quadrat ABCD Fig. 27 einen Kreis zu beschreiben?

S. Ich theilte zwey Seiten desselben z. B. AB und BC in zwey gleiche Theile, errichtete auf ihnen aus den Theilungspunkten senkrechte Linien, verlängerte diese, bis sie sich schnitten, und beschriebe dann aus dem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von irgend einer Winkelspitze des Quadrats einen Kreis. Hier Fig. 28 ist es geschehen.

L. Bey den gleichseitigen Dreyecken konnten wir uns die Aufrichtung der senkrechten Linie aus dem Halbirungspunkte der Seite dadurch erleichtern, daß wir sogleich von demselben nach der gegenüber liegenden Winkelspitze eine gerade Linie zogen. Sollte es nicht auch hier ein Erleichterungsmittel geben?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ja. Denn wenn man alle Seiten des Quadrats in zwey gleiche Theile theilt, und die gegenüber liegenden Halbirungspunkte durch gerade Linien verbindet; so erhält man ebenfalls Linien, die auf den Seiten des Quadrats in den Halbirungspunkten senkrecht stehen. Wenn z. B. Fig. 29 E, F, G und H die Halbirungspunkte

sind, und also $AE = EB = BF = FC$ $CG = GD = DH = HA$ ist; so ist

$HF \ddagger AB \ddagger DC$ und

$EG \ddagger AD \ddagger BC$, und

$HFC = ABC = R$, so wie auch

$GEB = DAB = R$.

Man hat hier also nur nöthig, alle Seiten des gegebenen Quadrats in zwey gleiche Theile zu theilen, welches, so bald eine Seite getheilt worden, sehr leicht ist, und die gegenüber liegenden Theilungspunkte durch gerade Linien verknüpfen, wo dann der Schneidungspunkt dieser Linien ebenfalls der gesuchte Mittelpunkt ist.

L. Ausserdem konnten wir bey den gleichseitigen Dreyecken, um den Mittelpunkt des um sie zu beschreibenden Kreises zu finden, zwey Winkel derselben in zwey gleiche Theile theilen, und diese Theilungslinien verlängern, bis sie sich schnitten. Wie wenn wir eben dasselbe bey dem Quadrate versuchten?

S. Auch bey dem Quadrate finden wir auf diese Art den gesuchten Mittelpunkt, und bey den Quadraten ist dieser Weg noch bequemer als bey den gleichseitigen Dreyecken; denn um einen Winkel eines Quadrats in zwey gleiche Theile zu theilen ist weiter nichts nöthig, als aus seiner Spitze nach der gegenüber liegenden Winkelspitze eine gerade Linie zu ziehen.

L. Welches wäre also auch wohl der bequemste Weg, einen Kreis um ein Quadrat zu beschreiben?

S. Der, daß man in dem Quadrate die beyden Diagonalen zöge, und aus ihrem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von irgend einer Winkelspitze des Quadrats einen Kreis beschriebe. Hier (Fig. 30) habe ich es gethan.

L. Wenn dieser Kreis durch A, B, C und D gehen soll, so müssen AE, BE, CE und DE unter einander gleich seyn; ist dies?

S. Ja; denn es ist

$\triangle ABE = \triangle BEC = \triangle CED = \triangle DEA$, weil

AB = BC = CD = DA, als Seiten Eines Quadrats, und

EAB = EBC = DCE = EDA, $\frac{1}{2}$ R

ABE = BCE = EDC = EAD = $\frac{1}{2}$R; folglich ist auch

AE = EB = EC = ED.

L. Wie würden Sie nun aber wohl einen Kreis in ein Quadrat beschreiben?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ich theilte alle Seiten des Quadrats in zwey gleiche Theile, verbände die gegenüber liegenden Theilungspunkte durch eine gerade Linie, und beschriebe aus dem Schneidungspunkte dieser Linien mit seiner Entfernung von einem Theilungspunkte einen Kreis. Hier (Fig. 31) habe ich es gethan.

L. Ist nun aber auch KE = KF = KG = KH?

S. Ja, denn eine jede dieser Linien ist der Hälfte der Seite des gegebenen Quadrats gleich.

L. Und berührt der auf die gedachte Art beschriebene Kreis eine jede Seite des Quadrats?

S. Ja, denn er geht nicht nur durch die Punkte E, F, G und H, sondern es haben auch die Seiten des Quadrats bloß diese Punkte mit dem Kreise gemein, weil sie in diesen Punkten auf seinen Halbmessern senkrecht stehen.

L. Nun kommt es also noch darauf an, daß wir die Art und Weise untersuchen, wie sowohl in als um einen gegebenen Kreis ein Quadrat beschrieben werden könne? Betrachten Sie zu dem Ende zuvörderst die 30ste Figur noch einmal. Nicht wahr, so bald die Linien AC und BD gezogen sind, so ist es leicht, auch das Quadrat zu beschreiben?

S. Ja, denn alsdann braucht man nur die Linien AB, BC, CD und DA zu ziehen.

L. Betrachten Sie also die Linien AC und BD genau. Was sind es für Linien?

S. Es sind Durchmesser des Kreises.

L. Und wie stehen Sie auf einander?

S. (Nach einigem Nachdenken) Senkrecht. Denn da AEB = BEC und AEB + BEC = 2 R ist, so ist auch AEB = BEC = R.

L. Wie beschreibt man also ein Quadrat in einen gegebenen Kreis?

S. Man zieht in dem gegebenen Kreise zwey Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen, und verbindet darauf ihre Endpunkte durch gerade Linien.

L. Wenn dies geschieht, so entstehen doch zugleich 4 Winkel am Mittelpunkte, die unter einander gleich sind, und ausserdem wird auch der Kreis dadurch in 4 Theile getheilt. Wie sind nun wohl diese 4 Theile des Kreises oder die Bogen AB, BC, CD und DA beschaffen?

S. Ebenfalls einander gleich, denn sie sind Bogen eines Kreises, welche zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gehören.

L. Und was sind die Linien AB, BC, CD und DA von diesem Bogen?

S. Sehnen.

L. Und wie also beschaffen, da ihre Bogen gleich sind?

S. Einander gleich, denn in Einem Kreise haben gleiche Bogen gleiche Sehnen, und gleiche Sehnen gleiche Bogen.

L. Wie theilt man daher einen Kreis in 4 gleiche Theile?

S. Man zieht in demselben zwey Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen.

L. Dies vorausgesetzt, so könnte man ja auch wohl noch auf eine andere Art die Frage

beantworten: Wie beschreibt man ein Quadrat in einen Kreis?

S. Man theilt den Kreis in vier gleiche Theile, und zieht die zu diesen Theilen gehörende Sehnen.

L. Wie wird denn nun aber wohl um einen Kreis ein Quadrat beschrieben werden können? Betrachten Sie nur die 31ste Figur recht aufmerksam.

S. Wenn man in dem Kreise zwey Durchmesser zieht, die auf einander senkrecht stehen, aus ihren Endpunkten Tangenten aufrichtet, und selbige so weit verlängert, bis je zwey und zwey sich schneiden.

L. Könnten Sie nicht auch diese Antwort noch auf eine andere Art ausdrucken?

S. Jc. Wenn man den Kreis in vier gleiche Theile theilt, durch die Theilungspunkte Tangenten legt, und selbige verlängert, bis je zwey und zwey sich schneiden.

L. Hier haben wir also eine andre Art, in oder um einen Kreis eine geradlinige Figur zu beschreiben, als wir bey den Dreyecken gelernt haben. Gesetzt, daß wir auf eine bequeme Art einen Kreis in drey Theile theilen könnten, sollten wir denn nicht auch auf eine ähnliche Weise ein gleichseitiges Dreyeck in oder um einen Kreis beschreiben können? Bey der 24sten und 26sten Figur werden Sie dies überlegen können.

S. Ja. Denn wenn Fig. 26 die Bogen AC, CB und BA einander gleich sind, so sind es die geraden Linien AC, CB und BA als ihre Sehnen ebenfalls; und wenn Fig. 24 die Bogen ED, DF und FE einander gleich sind, so sind auch die zu ihnen gehörige Winkel am Mittelpunkte EKD, DKF und FKE einander gleich. Ist aber dies, und sind die Linien AC, CB und AB Tangenten für die Punkte D, F und E, so sind auch die Winkel A, C und B einander gleich, weil ein jeder mit einem der gedachten Winkel am Mittelpunkte zusammen genommen 2 R gleich ist, und daraus folgt denn, daß AC = CB = BA oder das Dreyeck ABC ein gleichseitiges Dreyeck ist. Man kann also auch ein gleichseitiges Dreyeck in einen Kreis beschreiben, wenn man den Kreis in drey gleiche Theile theilt, und die Sehnen der dadurch entstandenen Bogen zieht; und um einen Kreis beschreibt man ein gleichseitiges Dreyeck, wenn man, nachdem man den Kreis in drey gleiche Theile getheilt hat, durch die Theilungspunkte Tangenten legt, und selbige verlängert, bis je zwey und zwey sich schneiden.

L. Es entsteht also hier die Frage: Wie theilt man einen gegebenen Kreis in drey gleiche Theile? Es giebt hierzu einen sehr leichten Weg. Denn wenn man Fig. 32 aus einem Punkte der Peripherie des Kreises ADBFA z. B. aus D mit dem Halbmesser des

gedachten Kreises einen andern Kreis ACBGA beschreibt; so schneidet dieser Kreis den vorhergehenden in zwey Punkten B und A. Zieht man nun von A und B nach DC gerade Linien; so ist

AE = EB = BD = DA = DE, und die beyden gleichen Dreyecke EAD und DEB sind gleichseitig, und ein jeder der Winkel AED und DEB also gleich $\frac{1}{3}$ von 2 R, folglich beyde zusammen genommen oder der Winkel AEB = $\frac{1}{3}$ von 4 R. Theilt man nun den Bogen AFB in F in zwey gleiche Theile; so ist

AEF = FEB; und da

AEF + FEB = 4 R — AEB, und

AEB = $\frac{1}{3}$ von 4 R; so ist

AEF + FEB = $\frac{2}{3}$ von 4 R, und

AEF = FEB = $\frac{1}{3}$ von 4 R, und

AEF = FEB = AEB = $\frac{1}{3}$ v. 4 R, u. folglich der Bogen AB = dem Bogen BF = dem Bogen AF.

Man hat also, um einen Kreis in drey gleiche Theile zu theilen nur nöthig, mit seinem Halbmesser aus einem Punkte seines Umfangs noch einen andern Kreis zu beschreiben, und durch die Mittelpunkte beyder Kreise eine gerade Linie nach dem Umfange des gegebenen Kreises zu ziehen.

S. Auf diese Art ist es leichter in oder um einen Kreis ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben, als auf die neulich betrachtete.

L. Das ist es allerdings, und Sie können sich ihrer daher auch in der Folge bedienen; auch dürfen Sie alsdann oft nur die Theilungspunkte, z. B. hier A, B und F bemerken, ohne den dabey gebrauchten Kreis ACBGA und die Linie DF ganz zu beschreiben. — Sind Sie nicht auch noch in eine andre Anzahl gleicher Theile als in drey und viere den Kreis zu theilen im Stande?

S. Nein.

L. Aber einen jeden gegebenen Bogen können Sie doch in zwey gleiche Theile theilen?

S. Ja; ich ziehe alsdann nur seine Sehne, fälle auf sie aus dem Mittelpunkte eine senkrechte Linie und verlängere diese, bis sie den Bogen trift.

L. Wenn Sie nun also einen Kreis in drey gleiche Theile getheilt hätten, und darauf einen jeden dieser Theile von neuem in zwey gleiche Theile theilten; würden Sie nicht dadurch den ganzen Kreis in lauter gleiche Theile theilen?

S. Ja, und zwar in sechse. Auf diese Art könnte ich dann auch den Kreis in zwölf, darauf in vier und zwanzig, dann in acht und vierzig gleiche Theile theilen u. s. w. ?

L. Ganz recht. Wie nun, wenn Sie einen gegebenen Kreis zuvörderst in vier gleiche Theile, und dann jeden Theil von neuem in zwey gleiche Theile theilten?

S. Dann theilte ich nach und nach den Kreis in 8, 16, 32, 64 gleiche Theile u. s. w.

L. Folglich sind Sie nunmehr im Stande, einen jeden Kreis in so viel gleiche Theile zu theilen, als durch die Multiplication der 3 oder 4 mit der Zahl zwey nur irgend entstehen können. Vielleicht kann uns dies helfen, um sowohl in als um einen gegebenen Kreis noch mehr geradlinige Figuren zu beschreiben, als wir bisher gelernt haben. Fig. 33 ist ein Kreis in acht gleiche Theile getheilt. Was können Sie nach dem bisherigen damit vornehmen?

S. Ich kann entweder die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH und HA ziehen, und dann erhalte ich ein in den Kreis beschriebenes gleichseitiges Achteck; denn die gedachten Sehnen sind insgesammt unter einander gleich, weil sie alle zu gleichen Bogen gehören: oder ich kann auch durch die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H Tangenten legen, und selbige verlängern, bis je zwey und zwey einander schneiden, und dann bekomme ich ein um den Kreis beschriebenes Achteck.

L. Nicht auch ein gleichseitiges?

S. Das weiß ich noch nicht.

L. Wir wollen es also untersuchen. Hier (Fig. 35) will ich Ihnen eine Figur geben, welche Ihnen diese Untersuchung erleichtern wird.

S. (Nachdem er zuvor die 35ste Figur aufmerksam betrachtet hat) Ja. Denn es ist

1. RI = IL, weil
△ AIK = △ IKB, indem
AK = KB
IK = IK und
KAI = IBK = R; also ist auch
AI = BI und
AKI = IKB = $\frac{1}{2}$ AKB und
AIB = KIB. Ferner ist
△ AKR = △ RHK, indem
AK = HK
RK = RK und
KAR = RHK = R. also ist auch
AR = RH
AKR = RKH = $\frac{1}{2}$ AKH und
ARK = KRH. Dann ist auch
△ BKL = △ LKC, indem
BK = CK
LK = LK und
KBL = LCK = R; also ist
BL = LC
BKL = LKC = $\frac{1}{2}$ BKC und
BLK = KLC. Da nun
AKB = AKH = BKC, so müssen es ihre Hälften auch seyn und es ist also AKI = IKB = AKR = RKH = BKL = LKC.
Ist dies, so ist ferner
△ RAK = △ KAI, weil
AK = AK
KAR = KAI = R und

AKR

AKR = AKI; also ist auch
AR = AI. Desgleichen ist
$\triangle$ IBK = $\triangle$ KBL; weil
KB = KB
IBK = KBL = R und
IKB = BKL; also ist auch
IB = BL. Da nun vorher
AI = IB
AR = RH
BL = LC war, und jetzt
AR = AI und
IB = BL ist; so muß auch
AR = AI = IB = BL und also
AR + AI = IB + BL oder
RI = IL seyn. Auf eben die Art
aber läßt sich zeigen, daß
HQ = QG
GP = PF
FO = OE
EN = ND
DM = MC, und
RH = HQ
QG = GP
PF = FO
OE = EN
ND = DM
MC = CL sey, und daraus fließt dann, daß
AI = AR = IB = BL = RH = HQ = QG = GP = PF = FO = OE = EN = ND = DM = MC = CL = LB, so wie hieraus, daß

RI

RI = IL = RQ = QP = PO = ON = NM = ML seyn.

L. Also wäre auch das um den Kreis beschriebene Achteck ein gleichseitiges. Wie aber sind denn wohl seine Winkel beschaffen?

S. Auch diese wären insgesammt unter einander gleich. Denn so wie vorhin bewiesen worden ist, daß

AIK = KIB
ARK = KRH und
BLK = KLC; so läßt sich auch ferner beweisen, daß

HQK = KQG
GPK = KPF
FOK = KOE
ENK = KND
DMK = KMC
CKL = LKB; und so wie vorher gezeigt worden, daß

RA = AI und
IB = BL, so läßt sich auch zeigen, daß

ARK = AIK; und dann ist
AIK = KIB = ARK = KRH und also
AIK + KIB = ARK + KRH oder
AIB = ARH. Ferner läßt sich beweisen, daß

HQK = HRK
GPK = KQG
FOK = KPF
ENK = KOE

DMK

DMK = KND

CLK = KMD, und aus diesem mit dem vorhergehenden zusammen genommen fließt, daß ARK = KRH = HQK = KQG = GPK = KPF = FOK = KOE = ENK = KND = DMK = KMC = CLK = KLB = BIK = KIA, so wie hieraus, daß ARH = HQG = GPF = FOE = END = DMC = CLB = BIA.

L. Wir hätten also ein um den Kreis beschriebenes gleichseitiges und gleichwinkliges Achteck. Ist nun etwa das Fig. 34 in den Kreis beschriebene Achteck auch gleichwinklig?

S. Ja. Denn die Dreyecke AKB, BKC, CKD, DKE, EKF, FKG, GKH und HKA sind lauter gleiche und gleichschenklige Dreyecke, weil

AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA und

AKB = BKC = CKD = DKE = EKF = FKG = GKH = HKA. Folglich ist auch

KAB = KBA = KBC = KCB = KCD = KDC = KDE = KED = KEF = KFE = KFG = KGF = KGH = KHG = KHA = KAH, und daher auch ABC = BCD = CDE = DEF = EFG = FGH = GHA.

L. Also ist auch diese Figur nicht bloß gleichseitig, sondern auch gleichwinklig. Vielleicht hilft uns die Theilung des Kreises in eine Anzahl gleicher Theile zur Beschreibung noch

meh-

mehrerer gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren, dergleichen man kurz reguläre oder ordentliche Figuren, und wenn sie mehr als vier Seiten haben, reguläre oder ordentliche Vielecke oder Polygone nennt, und wir wollen daher diese Materie auch in unserer nächsten Unterredung noch fortsetzen.

Achtzehntes Gespräch.

1. So oft wir bisher einen Kreis in eine Anzahl gleicher Theile theilten und die Sehnen der erhaltenen Bogen zogen, so erhielten wir jedesmal eine ordentliche oder reguläre Figur, die in den Kreis beschrieben war; und wenn wir durch die Theilungspunkte Tangenten legten, und dieselben verlängerten, bis je zwey und zwey sich schnitten, so erhielten wir immer eine um den Kreis beschriebene reguläre Figur. Verhält sich das etwa allezeit so, in was für eine Anzahl von gleichen Theilen auch der Kreis getheilt ist? Diese Frage ist wichtig. Denn muß sie bejahet werden, so fällt in die Augen, daß das Verfahren bey der Beschreibung regulärer Figuren in oder um einen Kreis bloß in der dabey vorzunehmenden Theilung des Kreises in gleiche Theile sich unterscheide, und daß man in oder um einen Kreis eine jede reguläre Figur beschreiben könne, so bald man im Stande ist, den Kreis in so

viel gleiche Theile zu theilen, als die gedachte reguläre Figur Seiten haben soll. Betrachten Sie also zuvörderst die 35ste Figur. Der daselbst befindliche Kreis ist in fünf gleiche Theile getheilt, und die Bogen AB, BC, CD, DE, EA sind also einander gleich. Wie sind nun zuvörderst die Seiten des daselbst in dem Kreise befindlichen Fünfecks beschaffen?

S. Alle unter einander gleich, weil sie Sehnen gleicher Bogen sind.

L. Gesetzt daß der Kreis Fig. 35 nicht in fünf, sondern in 6, oder 7, oder 8, oder 9 u. s. w. gleiche Theile getheilt, und die Sehnen der alsdann entstandenen gleichen Bogen gezogen worden wären; was würde alsdann statt finden?

S. Alsdann wäre entweder ein gleichseitiges Sechseck, oder Siebeneck, oder Achteck, oder Neuneck u. s. w. in den Kreis beschrieben worden; denn die Seiten der so entstehenden in den Kreis beschriebenen Figuren müssen immer unter einander gleich seyn, weil sie immer Sehnen gleicher Bogen sind.

L. Wie sind ferner die Winkel in dem Fünfecke Fig. 35 beschaffen?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ebenfalls einander gleich. Denn die Dreyecke AKB, BKC, CKD, DKE und EKA sind alle einander gleich, indem darin alle drey Seiten gleich sind, und überdem sind es gleichschenklige Dreyecke, weil die Linien AK, BK, CK, DK

DK und EK Halbmesser eines Kreises sind. Folglich ist auch

$$KAB = ABK = KBC = BCK = KCD = CDK \text{ u. s. f. und daher}$$

$$ABC = BCD = CDE = DEA = EAB.$$

L. Gesetzt nun, daß der Kreis Fig. 36 nicht in 5, sondern in 6 oder 7 oder 8 gleiche Theile u. s. w. getheilt, und darin anstatt des Fünfecks ein gleichseitiges Sechseck, oder Siebeneck, oder Achteck u. s. w. beschrieben worden wäre; würden diese Figuren auch gleichwinklige Figuren seyn oder nicht?

S. Ja, denn anstatt der 5 gleichen und gleichschenkligen Drenecke Fig. 36 hätte man alsdann 6 oder 7 oder 8 u. s. w. aber jedesmal unter einander gleiche und gleichschenklige Drenecke, und man könnte also denselben Beweis führen.

L. Wenn man also einen Kreis in irgend einer Anzahl gleicher Theile theilt, und die Sehnen der dadurch entstehenden Bogen zieht; so erhält man jedesmal eine in den Kreis beschriebene reguläre Figur von so viel Seiten, als man in dem Kreise Theile gemacht hat. — Nun betrachten Sie die 37ste Figur. Auch hier ist ein Kreis in 5 gleiche Theile getheilt worden, daß also die Bogen AB, BC, CD, DE und EA einander gleich sind. Darauf sind aber ferner durch die Punkte A, B, C, D und E Tangenten gelegt und je zwey und zwey

verlängert worden, bis sie sich schnitten. Es ist also das auf diese Art entstandene Fünfeck um den Kreis beschrieben; allein nun frägt sich

1. wie sind seine Seiten, und
2. wie sind seine Winkel beschaffen?

S. Es sind sowohl die Seiten als die Winkel unter einander gleich. Denn wenn man die Linien FK, GK, HK, IK und LK zieht; (Fig. 38) so ist

$\triangle AKG = \triangle GKB$, weil
$GK = GK$
$AK = KB$ und
$KAG = GBK = R$; folglich
auch $AKG = GKB = \frac{1}{2} AKB$, und
$AGK = KGB$ und
$AG = GB$.

Ferner ist

$\triangle BKH = \triangle HKC$, indem
$HK = HK$
$BK = KC$ und
$KBH = HCK = R$; folglich auch
$BKH = HKC = \frac{1}{2} BKC$ und
$BHK = KHC$ und
$BH = HC$. Eben so läßt sich nun zeigen, daß

$\triangle KCI = \triangle IKD$, und also
$CKI = IKD = \frac{1}{2} CKD$, und
$CIK = KID$ und
$CI = ID$: desgleichen daß
$\triangle KDL = \triangle LKE$ und also

DKL

DKL = LKE = ½ DKE und
DLK = KLE, und
LD = LE; und endlich daß
△ EKF = △ FKA und also
EKF = FKA = ½ EKA und
EFK = KFA und
EF = FA. Da nun aber
AKB = BKC = CKD = DKE = EKA,

weil sie Winkel am Mittelpunkte sind, deren Schenkel auf gleichen Bogen ruhen; so sind auch die Hälften dieser Winkel gleich, und also AKG = GKB = BKH = HKC = CKI = IKD = DKL u. s. w. Ist dies; so ist ferner

△ FKA = △ AKG, indem
KA = KA
KAF = KAG = R und
FKA = AKG; also auch
AF = AG und
KFA = AGK. Eben so ist
△ GBK = △ BKH, und also
GB = BH und
KGB = BHK; desgleichen
△ HKC = △ CKI und also
HC = CI und
KHC = CIK; ferner
△ IKD = △ DKL und also
ID = DL und
KID = DLK; und endlich
△ LKE = △ EKF und also
LE = EF und

KLE = EFK. Aus diesem und dem vorhin bewiesenen folgt aber

1. daß AG = GB = BH = HC = CI = ID = DL = LE = EF = FA und also auch FG = GH = HI = IL = LF.

2. daß AGK = KGB = BHK = KHC = CIK = KID = u. s. f., und also auch AGB = BHC = CID = DLE = EFA. Es ist also auch das Fig. 37 und 38 um den Kreis beschriebene Fünfeck ein gleichseitiges und gleichwinkliges oder ein reguläres Fünfeck.

L. Wie würden die Seiten und Winkel beschaffen seyn, wenn man auf eine ähnliche Art ein Sechseck oder ein Siebeneck oder ein Achteck um einen Kreis beschriebe?

S. Ebenfalls unter einander gleich, und zwar aus eben den Gründen, die ich gebraucht habe, mit dem einzigen Unterschiede, daß man, je mehr Seiten die um den Kreis beschriebene Figur hat, auch desto mehr Dreyecke betrachten muß.

L. Wenn man also einen Kreis in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilt, und durch die Theilungspunkte der Peripherie Tangenten legt, und dieselben so weit verlängert, bis je zwey und zwey sich schneiden; so erhält man jedesmal eine um den Kreis beschriebene reguläre Figur von so viel Seiten als man den Kreis in Theile getheilt hat. — Nun wissen wir, daß das Verfahren bey der Be-

schrei-

schreibung einer regulären Figur in oder um einen Kreis, dessen wir uns schon einigemal bedient haben, allgemein angewandt werden könne, und daß es bey der Beschreibung einer regulären Figur in oder um einen Kreis vorzüglich auf die Theilung des Kreises in so viel gleiche Theile als die in oder um denselben zu beschreibende reguläre Figur Seiten haben soll, ankomme. Wie wenn wir nun auch untersuchten, ob man auf eben die Art, als solches bey einem gleichseitigen Dreyecke und Quadrate möglich war, in oder um eine jede geradlinige Figur einen Kreis beschreiben könne? Welches war die Art und Weise hievon?

S. Wir theilten entweder zwey an einer Seite liegende Winkel in zwey gleiche Theile und verlängerten die Theilungslinien, bis sie sich schnitten; oder halbirten zwey einen Winkel einschliessende Seiten, richteten aus den Theilungspunkten senkrechte Linien auf, und verlängerten auch diese, bis sie sich schnitten. Der auf diese Art erhaltene Schneidungspunkt war jedesmal der Mittelpunkt des Kreises, der in oder um die gegebene geradlinige Figur beschrieben werden konnte, und der Halbmesser dieses Kreises seine Entfernung entweder von den getheilten Winkeln oder von der getheilten Seite, je nachdem er um oder in dieselbe beschrieben werden sollte.

L. Wir wollen also jetzt einmal annehmen, daß Fig. 36 ein gleichseitiges und gleichwinkliges

liges Fünfeck gezeichnet und die Winkel EAB und ABC durch AK und BK halbirt seyn. Wird nun, wenn man aus K mit AK oder KB einen Kreis beschreibt, derselbe durch A, B, C, D und E gehen?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ja. Denn wenn man alle Winkel des beschriebenen Fünfecks halbirt, so müssen von den Theilungslinien immer je zwey und zwey sich einander schneiden. Da nun das Fünfeck ein reguläres Fünfeck ist, so sind alle Winkel desselben und folglich auch die Hälften dieser Winkel einander gleich. Es sind daher auch die Dreyecke AKB, BKC, CKD, DKE und EKA einander gleich und lauter gleichschenklige Dreyecke, und also

AK = BK = CK = DK = EK und der Kreis, der aus K mit AK oder BK beschrieben wird, muß durch die Punkte A, B, C, D und E gehen.

L. Gesetzt, daß wir anstatt eines regulären Fünfecks, ein reguläres Sechseck oder Siebeneck, oder Achteck u. s. w. genommen hätten; würden wir da eben so haben schliessen können?

S. Ja; der einzige Unterschied ist, daß je mehr Seiten die angenommene Figur hat, desto mehr Dreyecke zu betrachten sind.

L. Und was läßt sich daher behaupten?

S. Daß, wenn man zwey an einer Seite einer regulären Figur liegende Winkel in

zwey

zwey gleiche Theile theilt, die Theilungslinien verlängert, bis sie sich schneiden, und aus dem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von der Spitze eines der getheilten Winkel einen Kreis beschreibet, dieser Kreis durch alle Winkelspitzen der gegebenen regulären Figur gehe, und also um dieselbe beschrieben sey.

L. Nun nehmen Sie ferner an, daß Fig. 37 ein reguläres Fünfeck beschrieben und zwey einen Winkel einschliessende Seiten desselben FG und GH in A und B halbiret, in A und B die Linien AK und BK, die sich in K schneiden, senkrecht auf FG und GH aufgerichtet, und aus K mit AK oder KB ein Kreis beschrieben worden sey; und untersuchen Sie, was von diesem Kreis behauptet werden könne?

S. Dieser Kreis ist in das gegebene reguläre Fünfeck beschrieben. Denn wenn man zuvörderst wie Fig. 38 die Linien FK und KG und KH zieht, so ist

$\triangle FKA = \triangle AKG$, indem
$FA = AG$
$AK = AK$ und
$FAK = KAG = R$, und also auch
$KFA = AGK$ und
$FKA = AKG$ und
$FK = KG$; ferner ist
$\triangle GKB = \triangle BKH$, indem
$GB = BH$
$KB = KB$ und
$GBK = KBH$; also auch

KGB = BHK und
GKB = BKH und
GK = KH. Ferner ist
△AKG = △GKB, indem
AG = GB
GK = GK und
KAG = GBK = R, und also auch
AGK = KGB = $\frac{1}{2}$ AGB
AK = KB.

Fällt man nun aus K auf HI, IL, und LF die senkrechten Linien KC, KD, und KE; so wird
△BHK = △HKC, indem
KBH = HCK
BHK = $\frac{1}{2}$ BHC = KHC und
KH = KH; und es muß also auch
KB = KC seyn. Ferner wird
△HCK = △KCI, indem
HCK = ICK
KC = KC und
CHK = CIK, so daß also auch
HK = KI. Auf eben die Art läßt

sich nun zeigen, daß
KC = KD
KI = KL
KD = KE
KL = KF und
KE = KA. Es wird also

AK = KB = KC = KD = KE, und aus K mit AK einen Kreis beschrieben, so muß derselbe durch A, B, C, D und E gehen, und

da

da die Winkel bey diesen Punkten lauter rechte Winkel sind, so berührt überdem dieser Kreis eine jede Seite des gegebenen regulären Fünfecks und ist also in dasselbe beschrieben.

L. Gesetzt nun, daß wir anstatt eines regulären Fünfecks eine andere reguläre Figur genommen hätten; wie dann?

S. Man hätte demohnerachtet auf eben dieselbe Art schließen können, nur mit dem Unterschiede wieder, daß man desto mehr Dreyecke zu betrachten gehabt hätte, je vielseitiger die angenommene reguläre Figur gewesen wäre.

L. Und was läßt sich also nun wieder behaupten?

S. Wenn man zwey einen Winkel einer ordentlichen Figur einschließende Seiten in zwey gleiche Theile theilt, aus den Theilungspunkten senkrechte Linien auf denselben errichtet, dieselben verlängert bis sie sich schneiden und aus dem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von den gedachten Theilungspunkten einen Kreis beschreibet, so wird dieser Kreis in die gegebene ordentliche Figur beschrieben.

L. Nun sind wir davon überzeugt, daß sich sowohl in und um eine jede reguläre Figur ein Kreis, als auch in oder um einen jeden Kreis eine jede reguläre Figur beschreiben

 läßt;

läßt; und wir können also nun zu den Fragen fortgehen, deren Beantwortung die bisherigen Betrachtungen nothwendig machte. Wie groß ist also

1. eine reguläre Figur gegen den in sie beschriebenen Kreis gehalten?

S. Größer als der Kreis.

L. Und um wie viel?

S. Um die vermischtlinigen Dreyecke, welche von der Peripherie des Kreises und den Seiten der um denselben beschriebenen regulären Figur gemacht werden.

L. Sollte man nicht im Stande seyn eine genauere Antwort auf die Frage zu geben?

S. Ich wenigstens sehe nicht wie?

L. Betrachten Sie also die 39ste Figur, wo ein reguläres Fünfeck theils um theils in einen Kreis, und auch ein Kreis sowohl in als um dasselbe beschrieben ist. Was ist daselbst mit dem regulären Fünfecke durch die Linien GK, HK, IK, LK, FK geschehen?

S. Es ist dasselbe dadurch in lauter gleichschenklige und gleiche Dreyecke getheilt worden.

L. Und es ist also diese reguläre Figur so groß, als alle diese Dreyecke zusammen genommen; nicht?

S. Ja.

L. Und da alle Dreyecke unter einander gleich sind, so kann man auch sagen?

S. Daß sie so groß seyn, als eines dieser Dreyecke fünfmal genommen.

L. Wie groß ist nun eines dieser Dreyecke?

S. Wie soll ich das bestimmen?

L. Ist nicht ein jedes dieser Dreyecke durch die aus seiner Spitze auf die Grundlinie gezogene Perpendikuläre wieder getheilt worden?

S. Ja und zwar in zwey rechtwinklige und gleiche Dreyecke.

L. Wie groß ist nun die eine Cathete dieser Dreyecke?

S. So groß als die Hälfte einer Seite des regulären Fünfecks.

L. Und die andere Cathete?

S. So groß als der Radius des in das reguläre Fünfeck beschriebenen Kreises.

L. Und beyde Dreyecke zusammen genommen sind also wie groß?

S. So groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete gleich der Seite des regulären Fünfecks und die andere gleich dem Radius des in dieses Fünfeck beschriebenen Kreises ist.

L. Wie groß sind nun alle fünf Dreyecke zusammen genommen?

S. So groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete gleich dem Umfange des Fünfecks und die andere Cathete gleich dem Radius des in dies Fünfeck beschriebenen Kreises ist.

L. Wenn Sie wollen, so können Sie sich hievon auch noch auf folgende Art überzeugen. Wenn man die Dreyecke, worin das reguläre

läre Fünfeck Fig. 39 durch die Linien GK, HK, IK, LK und FK getheilt ist, so neben einander legt, daß ihre Grundlinien in einer geraden Linie liegen, so ist es leicht, alle diese Dreyecke in ein einziges rechtwinkliges Dreyeck zu verwandeln. Denn es sey Fig. 40 und Fig. 39

$$bc = GH$$
$$ce = HI$$
$$eg = IL$$
$$gi = LF$$
$$il = FG \text{ und}$$

$$ab = ac = dc = de = fe = fg = hg = hi$$
$$kg = kl = GK = HK = KI = LK = FK,$$

so daß also auch $\triangle\, abc = \triangle\, dce = \triangle\, feg = \triangle hgi = \triangle kil = \triangle GKH = \triangle HKI = \triangle IKL = \triangle KLF = \triangle KFG$, und folglich

$$\triangle abc + \triangle dce + \triangle fcg + \triangle hgi + \triangle kil = GHIKFG$$

Fig. 39; so ist wenn man al zieht

$$\triangle abl = \triangle abc + \triangle dce + \triangle feg + \triangle hgi + \triangle kil,$$

und also auch

$$\triangle abl = GHIKFG.$$

Fällt man nun aus a die Linie am senkrecht auf bc, und zieht aus b die Linie bn = am senkrecht auf bc und ausser ihr nl und na; so ist na ∦ bc, weil bn ∦ und = am ist, und die Dreyecke nbl und abl sind einander gleich, weil sie einerley Grundlinie bl haben, und beyde zwischen einerley Parallelen liegen. Also ist nun auch

△

$$\triangle nbl = GHIKFG,$$ und da
$$am = KB$$ also auch
$$nb = am = KB$$ und
$$bl = GH + HI + IL + LF + FG;$$
so ist das reguläre Fünfeck GHIKFG gleich einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete seinem Umfange und die andere dem Radius des in dasselbe beschriebenen Kreises ist. Daß aber
$$\triangle abl = \triangle abc + \triangle dce + \triangle feg + \triangle hgi + \triangle kil$$ erhellet also. Es ist
$$\triangle abc = \triangle dce$$
$$\triangle ace = \triangle abc,$$ (gleiche Grundlinie und einerley Parallelen) also
$$\triangle ace = \triangle dce.$$ Eben so ist
$$\triangle aeg = \triangle feg,$$ weil
$$\triangle aeg = \triangle abc$$ und
$$\triangle abc = \triangle feg;$$ ferner
$$\triangle agi = \triangle hgi,$$ weil
$$\triangle agi = \triangle abc$$ und
$$\triangle abc = \triangle hgi;$$ endlich
$$\triangle ail = \triangle kil,$$ weil
$$\triangle ail = \triangle abc$$ und
$$\triangle abc = \triangle kil.$$ Hieraus folgt, daß
$$\triangle abl = \triangle abc + \triangle ace + \triangle aeg + \triangle agi + \triangle ail = abc + \triangle dce + \triangle feg + \triangle hgi + \triangle kil$$ sey. — Gesetzt nun, daß anstatt des Fünfecks Fig. 39 irgend ein anderes reguläres Vieleck genommen würde; könnte man nicht gleichwohl auf eine ähnliche Art schließen?

S. Ja.

L. Und wie groß ist also eine jede ordentliche Figur?

S. So groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete ihrem Umfange, und die andere dem Radius des in sie beschriebenen Kreises gleich ist.

L. Wie groß ist nun

2. eine jede reguläre Figur gegen den um sie beschriebenen Kreis gehalten?

S. Kleiner als der Kreis.

L. Und um wie viel?

S. Um die Abschnitte, welche die Seiten der regulären Figur mit ihren Bogen machen.

L. Vergleicht man also eine und dieselbe reguläre Figur zuvörderst mit einem in, und dann mit einem um sie beschriebenen Kreise; so läßt sich behaupten,

1. daß die reguläre Figur größer als der in sie beschriebene und

2. kleiner sey, als der um sie beschriebene Kreis, und

3. daß eine jede reguläre Figur so groß sey, als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange derselben und die andere dem Radius des in sie beschriebenen Kreises gleich ist. Wie ist denn nun aber der Umfang einer regulären geradlinigen Figur gegen die Peripherie des in oder um sie beschriebenen Kreises beschaffen?

S. Kleiner als die Peripherie des um sie, und größer als die Peripherie des in sie beschriebenen Kreises.

L. Von diesen Sätzen werden wir bald im Stande seyn, einen sehr wichtigen Gebrauch zur Bestimmung der Größe eines jeden Kreises zu machen, und suchen Sie daher sich dieselben geläufig zu erhalten. Es werden aber dazu noch einige andere Sätze erfordert, und es wird auch nicht schaden, wenn wir uns ausserdem noch mit einigen andern Theilungen des Kreises in gleiche Theile bekannt machen; und das wollen wir in unserer nächsten Unterredung thun.

Neunzehntes Gespräch.

L. In zwey, drey, vier, sechs gleiche Theile u. s. w. haben wir den Kreis theilen gelernt, und waren dadurch in den Stand gesetzt, auf eine leichte Art sowohl in als um den Kreis ein reguläres Vieleck von so viel Seiten zu beschreiben, als der Kreis gleiche Theile erhalten hatte. Könnten wir den Kreis in eine jede Anzahl gleicher Theile theilen, so wäre dadurch für die Beschreibung einer jeden Art der regulären Vielecke sehr viel gewonnen; und wir müssen daher wenigstens noch mit einigen Theilungen des Kreises in gleiche Theile uns bekannt machen. Die nächste ist die Theilung

des

des Kreises in fünf gleiche Theile. Fig. 36 war ein Kreis in fünf gleiche Theile getheilt. Betrachten Sie diese Figur, vielleicht daß Sie daran die Art und Weise, einen Kreis in fünf gleiche Theile zu theilen, entdecken können.

S. — — Diese Figur enthält nichts dazu dienliches.

L. Vielleicht also die 41ste Figur; wenigstens wollen wir dieselbe genauer untersuchen. Wie sind also, wenn der daselbst befindliche Kreis in fünf gleiche Theile getheilt ist, darin die Dreyecke ADC, BED, CEA, DAB und EBC beschaffen?

S. Eine Seite ist in allen gleich, denn es ist AB = BC = CD = DE = EA.

L. Sind nicht auch Winkel darin gleich?

S. — — Ja; es ist DAC = EBD = ACE = BDA = CEB, denn alle diese Winkel sind Winkel an der Peripherie, deren Schenkel auf gleichen Bogen, nemlich DC = ED = AE = BA = CB, ruhen.

L. Wie sind denn wohl die Winkel ADC und ACD in dem Dreyecke ADC beschaffen?

S. — — Einander gleich, denn beyde sind Winkel an der Peripherie, und die Schenkel des Winkels ADC ruhen auf dem Bogen ABC und die Schenkel des Winkels ACD auf dem Bogen DEA und die Bogen ABC und DEA sind einander gleich.

L.

L. Wie verhält es sich nun mit den Winkeln über der gleichen Seite in den übrigen Dreyecken BED, CEA, DAB und EBC?

S. Auch in diesen sind die Winkel über der gedachten Seite einander gleich; nemlich

BED = BDE
CAE = CEA
DAB = DBA und
ECB = EBC, und zwar aus

einem ähnlichen Grunde.

L. Was sind also die Dreyecke ADC, BED, CAE, DAB und EBC für welche?

S. Gleichschenklige Dreyecke, und auch alle unter einander gleich. Denn da die Winkel derselben an der Spitze einander gleich sind, so sind auch die Summen ihrer Winkel über der Grundlinie einander gleich und von einer dieser Summen ist jeder einzele Winkel die Hälfte. Es sind also in diesen Dreyecken eine Seite und alle Winkel gleich.

L. Noch eine sehr merkwürdige Eigenschaft haben diese Dreyecke, welche Sie auch leicht finden werden, wenn Sie nur irgend einen Winkel über der Grundlinie mit dem Winkel an der Spitze vergleichen.

S. — — Der Winkel über der Grundlinie ist noch einmal so groß als der Winkel an der Spitze, denn beyde sind Winkel an der Peripherie, aber die Schenkel des Winkels über der Grundlinie ruhen auf einem doppelt

so großen Bogen als die Schenkel des Winkels an der Spitze.

L. Ein jeder Winkel über der Grundlinie ist aber auch in zwey gleiche Theile getheilt, und es sind daher alle folgende Winkel einander gleich DAC = CAB = ABE = EBD u. s. w. Nun sey Fig. 42 in dem Dreyecke ADC der Winkel ADC = ACD = 2 DAC und ADB = BDC = DCE = ECA = DAC. Wie sind daher die Bogen AB, BC, CD, DE und EA beschaffen?

S. Alle unter einander gleich; denn so wie Winkel an der Peripherie einander gleich sind, wenn sie in Einem Kreise sich befinden und ihre Schenkel auf gleichen Bogen ruhen, so sind auch die Bogen eines Kreises gleich, die zu gleichen Winkeln an der Peripherie gehören.

L. Wie könnte man daher einen Kreis in fünf gleiche Theile theilen?

S. Wenn man in den Kreis ein gleichschenkliges Dreyeck beschriebe, in welchem der Winkel über der Grundlinie noch einmal so groß wäre als der Winkel an der Spitze, und jeden der Winkel über der Grundlinie in zwey gleiche Theile theilte.

L. Es kommt also alles nunmehr darauf an, daß wir untersuchen, wie man ein gleichschenkliges Dreyeck beschreibt, in welchem der Winkel über der Grundlinie noch einmal so groß ist, als der Winkel an der Spitze. Wie beschreibt man ein solches Dreyeck? — Wenn

in

in dem Dreyecke ABC Fig. 43 AC = BC und BAC = ABC = 2 ACB seyn soll, so muß, wenn man AD so zieht, daß BAD = DAC, nicht nur

DAC = ACD und also
AD = DC; sondern auch
ADB = ABD, indem
ADB = 2 ACD = ABD und also
AB = AD folglich
AB = AD = DC seyn.

Beschriebe man nun um das Dreyeck ADC wie Fig. 44 einen Kreis, so würde, wenn BA eine Tangente desselben für den Punkt A wäre, nicht nur

BAD = ACD sondern auch, wenn überdem

BD x BC = DCq wäre
AB = DC seyn. Denn es wäre dann auch
BD x BC = ABq und also
ABq = DCq und
AB = DC.

Wenn man also ein gleichschenkliges Dreyeck beschreiben will, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie noch einmal so groß ist, als der Winkel an der Spitze; so muß man zuvörderst eine gerade Linie in zwey Theile so theilen, daß das Rechteck zwischen dem einen Theile und der ganzen Linie gleich ist dem Quadrate des andern Theils, und darauf diesen zweyten Theil zur Grundlinie und die

ganze Linie zum Schenkel machen. Denn wenn Fig. 44 BC so getheilt ist, daß

BD x BC = DCq und

darauf das Dreyeck ABC so beschrieben ist, daß

AC = BC und

BA = DC; so ist auch

BD x BC = BAq und

wenn man also durch A, D und C einen Kreis beschreibt, so wird BA eine Tangente desselben für den Punkt A. Daher folgt nun, daß

BAD = ACD, und

ADB = BAC, indem

ADB = DAC + ACD = DAC + BAD = BAC. Da nun

BAC = ABC, so ist auch

ADB = ABD und also

AB = AD, und weil

AB = DC auch

AD = DC und

DAC = ACD und

DAC = DAB, und also

ACD = $\frac{1}{2}$ BAC.

Ist nun ein gleichschenkliges Dreyeck beschrieben, worin der Winkel über der Grundlinie noch einmal so groß ist als der Winkel an der Spitze, so darf man nur, wie Sie vorhin auch schon bemerkt haben, um einen Kreis in fünf gleiche Theile zu theilen, dies Dreyeck in den Kreis beschreiben, und die beyden Winkel über der Grundlinie halbiren. — Wenn ein Kreis aber in fünf gleiche Theile getheilt ist, so kann man

man ihn durch die Theilung eines jeden Theils in zwey gleiche Theile ferner theilen?

S. In zehn, in zwanzig, in vierzig gleiche Theile u. s. w.

L. Und Sie sind also nunmehr auch im Stande sowohl in als um einen Kreis ein reguläres Fünfeck, ein reguläres Zehneck, ein reguläres Zwanzigeck u. s. w. zu beschreiben. Theilt man nun einen Kreis zuvörderst in fünf und dann auch in drey gleiche Theile, doch so, daß man den Anfang dieser leztern Theilung aus einem Theilungspunkte der erstern macht; so kann man den Kreis auch in funfzehn gleiche Theile theilen. Denn wenn der Kreis Fig. 45 in A, C und D in drey gleiche, und in E, F, G, H und I in fünf gleiche Theile getheilt ist; so enthält, wenn man sich den ganzen Kreis in funfzehn gleiche Theile gedenkt, AC fünf und AB drey solcher Theile, und BC also zwey, und theilt man also BC in K in zwey gleiche Theile, so ist EC = EB einer dieser Theile; und nun können wir auch ferner den Kreis in sechszig, in hundert und zwanzig, in hundert und vierzig u. s. w. gleiche Theile theilen. — Bey diesen Theilungen des Kreises in gleiche Theile wollen wir es nun bewenden lassen. Zwar sind es sehr wenige gegen die unendliche Anzahl derer, die man sich ausser ihnen noch gedenken kann; indeß bedürfen wir der übrigen fürs erste noch nicht, und es erfordern dieselbigen auch Kenntnisse, zu denen bisher noch

keine Gelegenheit da gewesen ist. Allein nun noch eine Anwendung des bisherigen. Wenn in oder um einen Kreis irgend ein reguläres Vieleck beschrieben ist; so kann man auch jedesmal ein anderes, welches noch einmal so viel Seiten hat, in oder um denselben beschreiben. Diese Behauptung gründet sich darauf, theils, daß man einen jeden Kreis, der in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt ist, auch in doppelt so viel gleiche Theile theilen kann, theils daß man im Stande ist, sowohl in als um einen in gleiche Theile getheilten Kreis ein reguläres Vieleck von so viel Seiten als der Kreis Theile hat, zu legen; und bedarf also keines weitern Beweises. Aber vergleichen müssen wir nun noch die in oder um einen Kreis beschriebenen regulären Figuren, davon die eine doppelt so viel Seiten hat als die andere mit dem Kreise, und zwar so, daß wir daben sowohl auf ihren Raum als auf ihren Umfang sehen. Betrachten Sie also die 46ste Figur. Es ist daselbst ein reguläres Sechseck und ein reguläres Zwölfeck in einen Kreis beschrieben. Welches ist größer?

S. Das Zwölfeck.

L. Und um wie viel?

S. Um die Dreyecke AGB, BHC, CID, DLE, EMF und FNA.

L. Und welche Figur hat einen größern Umfang?

S. Ebenfalls das Zwölfeck.

L. Warum?

S. Weil je zwey Seiten desselben zusammen genommen größer sind, als eine Seite des Sechsecks. So ist $AG + GB > AB$, $BH + HC > BC$, $CI + CD > CD$ u. s. w.

L. Wenn man also in einen Kreis zwey reguläre Vielecke beschreibt, davon das eine doppelt so viel Seiten hat als das andere; so ist nicht nur das Vieleck mit doppelt so viel Seiten größer als das andere, sondern es hat auch einen größern Umfang. Wie verhält es sich nun bey den um den Kreis beschriebenen Vielecken? Fig. 47 ist ein reguläres Sechseck und Zwölfeck um einen Kreis beschrieben. Nehmen Sie diese Figur zur Hülfe.

S. Hier ist das Vieleck, welches doppelt so viel Seiten hat, kleiner als das andere.

L. Und um wie viel?

S. Um die Dreyecke ASG, BHI, CKL, DMN, EPO und FRQ.

L. Und wie ist der Umfang des Zwölfecks beschaffen?

S. Ebenfalls kleiner als der Umfang des Sechsecks, indem $AS + AG > SG$, $HB + BI > HI$, $KC + CL > KL$ u. s. w.

L. Wenn man also zwey in einen Kreis beschriebene reguläre Vielecke, davon das eine doppelt so viel Seiten hätte, als das andere, mit dem Kreise vergleichen wollte, was würde man behaupten können?

S. Daß der Unterschied zwischen dem Vielecke von doppelt so viel Seiten und dem Kreise kleiner sey als der Unterschied des andern Vielecks und des Kreises.

L. Und was ließe sich ferner von den Umkreisen derselben sagen?

S. Ebenfalls daß der Unterschied zwischen dem Umfange des regulären Vielecks von doppelt so viel Seiten und dem Umfange des Kreises, der kleiner sey.

L. Wie aber wenn man zwey um einen Kreis beschriebene reguläre Vielecke, davon das eine doppelt so viel Seiten hätte als das andere, mit dem Kreise vergliche?

S. Dann wäre der Unterschied zwischen dem Vielecke von doppelt so viel Seiten und dem Kreise kleiner, und so auch der Unterschied zwischen dem Umfange dieses Vielecks und dem Umfange des Kreises.

L. So weit läßt sich alles sehr leicht bestimmen; allein wir müssen noch etwas tiefer eindringen, und das soll in unserer nächsten Unterredung geschehen.

Zwanzigstes Gespräch.

L. Fig. 48 ist ein Abschnitt ABCA gezeichnet, dessen Bogen ABC in die beyden gleichen Theile AB und BC getheilt worden ist. Durch die Sehnen dieser Bogen, AB nemlich und

BE

BE, wird der Abschnitt ABCA in das Dreyeck ABC und die beyden Abschnitte AGBA und BHCB getheilt. Wie groß ist nun wohl das Dreyeck ABC gegen den Abschnitt ABCA gehalten?

S. Das Dreyeck ist kleiner als der Abschnitt.

L. Läßt sich nicht etwa noch eine bestimmtere Antwort geben?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ich sehe nicht wie?

L. Vergleichen Sie einmal die 49ste Figur mit der 48sten. BDC ist daselbst = BDA = R, ferner ist EF ⋕ AC und EA ⋕ BD ⋕ FC.

S. Nun verstehe ich es schon. Das Dreyeck ABC ist größer als die Hälfte des Abschnittes ABCA. Denn Fig. 49, wo BDA = BDC = R und EF ⋕ AC und EA ⋕ BD ⋕ FC ist, ist

$\triangle$ ABD = $\triangle$ BDC indem
AB = BC und
BD = BD und
BDA = BDC = R. Ferner ist
$\triangle$ ADB = $\frac{1}{2}$ AEBD und
$\triangle$ BDC = $\frac{1}{2}$ DBFC, also
$\triangle$ ADB + $\triangle$ BDC = $\frac{1}{2}$ AEBD + $\frac{1}{2}$ DBFC oder
$\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ AEFC. Dagegen ist
AGBA $<$ $\frac{1}{2}$ AEBD und
BHCB $<$ $\frac{1}{2}$ DBFC und also

$$AGBA + BHCB < \tfrac{1}{2}AEBD + \tfrac{1}{2}DBFC$$

oder

$$AGBA + BHCB < \tfrac{1}{2}AEFC$$ u. folglich

$\triangle ABC > AGBA + BHCB$, oder das Dreyeck ABC größer als die Hälfte des Abschnittes ABCA.

L. Nun betrachten Sie die 50ste Figur, wo ABC = R und der Bogen BF = dem Bogen FD, oder ECB = ECD ist. Wie sind nun zuvörderst die Dreyecke EBC und ECD beschaffen?

S. Einander gleich, weil

BC = CD als Halbmesser eines Kreises
EC = EC und
ECB = ECD.

L. Was folgt daraus?

S. Daß BE = ED und EBC = EDC = R.

L. Wenn nun BE = ED und EDC = R; wie sind die Linien AE und EB gegen einander gehalten beschaffen?

S. (Nach einigem Nachdenken) AE ist größer als EB. Denn da

EDC = R; so ist auch
EDA = R und folglich
DAE < R und also
EA > ED. Da nun
ED = EB, so ist auch
EA > EB.

L. Und also die Linie BA gegen die beyden Linien BE und ED zusammen genommen gehalten?

S.

S. So ist $BA > BE + ED$. Denn es ist

$BE = BE$, und

$EA > ED$, also

$BE + EA > BE + ED$ oder

$BA > BE$.

L. Wie sind ferner die Figuren ABFDA und AED beschaffen?

S. Das Dreyeck AED scheint mehr zu seyn als die Hälfte von ABFDA, allein mit Gewißheit kann ich nicht darüber urtheilen.

L. So betrachten Sie die 51ste Figur. Was urtheilen Sie von den beyden Dreyecken ADE und DEB?

S. Das Dreyeck AED ist größer als das Dreyeck DEB; denn die Grundlinie des Dreyecks AED ist größer als die Grundlinie des Dreyecks DEA, weil $AE > EB$ ist, und beyde liegen zwischen einerley Parallelen, nemlich zwischen AB und der durch D mit AB gezogenen Parallellinie.

L. Aber das Dreyeck DEB ist doch auch größer als die Figur DEBFD?

S. Ja, und das Dreyeck AED auch größer als die Hälfte von ABFDA. Denn da

$\triangle AED > \triangle DEB$ und

$\triangle DEB > DEBFD$; so ist auch

$\triangle AED > DEBFD$.

L. Nun betrachten Sie die 46ste Figur noch einmal. Das daselbst in den Kreis beschriebene reguläre Zwölfeck ist größer als das in eben den Kreis beschriebene reguläre

Sechs-

Sechseck und zwar um die Dreyecke AGB, BHC, CID, DLE, EMF und FNA; und beyde Figuren sind kleiner als der Kreis, in welchem sie beschrieben sind. Wie groß ist aber nun der Unterschied des Zwölfecks und des Kreises gegen den Unterschied des Sechsecks und des Kreises gehalten?

S. Dieser leztere Unterschied ist kleiner als die Hälfte des erstern Unterschiedes, denn die Zwölf Abschnitte, um welche der Kreis grösser ist, als das Zwölfeck, betragen nicht so viel als die 6 Dreyecke, um welche das Zwölfeck von dem Sechsecke unterschieden ist.

L. Wenn also in einen Kreis ein reguläres Vieleck beschrieben ist und man beschreibt darauf noch ein anderes in denselben, welches noch einmal so viel Seiten hat; so sind beyde kleiner als der Kreis, aber der Unterschied zwischen der mehrseitigen Figur und dem Kreise ist kleiner als die Hälfte des Unterschiedes zwischen der Figur von halb so vielen Seiten und dem Kreise. Einen ähnlichen Satz kann man von den um den Kreis beschriebenen ordentlichen Figuren behaupten. Betrachten Sie nur die 47ste Figur noch einmal sorgfältig, so werden Sie ihn bald finden.

S. Auch hier beträgt der Unterschied zwischen einer regulären um einen Kreis beschriebenen Figur und dem Kreise weniger als der Unterschied zwischen einer eben so beschriebenen

nen Figur von halb so viel Seiten und dem Kreise. Denn Fig. 47 ist

$agH < \frac{1}{2}\, agBHa$, weil
$agH < \triangle\, HgB$, und
$gIb < \frac{1}{2}\, g\, BIbg$, weil
$gIb < \triangle\, gBI$; also ist auch
$agH + gIB < \frac{1}{2}\, agbIBHa$. Eben so

läßt sich zeigen, daß

$bKh + hLc < \frac{1}{2}\, bhcLCKb$ und
$cMI + iNL < \frac{1}{2}\, cilNDMc$ u. s. w.

also der ganze Unterschied zwischen dem Zwölfecke und dem Kreise kleiner als die Hälfte des Unterschiedes zwischen dem Sechsecke und dem Kreise.

L. Fig. 52 ist $ABC = R$ und die Dreyecke ABC, ABD und EBD also rechtwinklige Dreyecke. Was läßt sich von diesen in Ansehung ihrer Größe behaupten?

S. Daß

$\triangle\, ABC > \triangle\, ABD$
$\triangle\, ABD > \triangle\, EBD$ und
$\triangle\, ABC > \triangle\, EBD$.

L. Wie unterscheiden sich die beyden Dreyecke ABC und ABD von einander?

S. Es sind zwey rechtwinklige Dreyecke, welche eine Cathete gleich, die andere aber ungleich haben.

L. Wie ferner die Dreyecke ABD und EBD?

S. Eben so.

L. Aber die beyden Dreyecke ABC und EBD?

S.

S. In dem einen dieser Dreyecke sind beyde Catheten größer als in dem andern.

L. Was läßt sich von dergleichen rechtwinkligen Dreyecken behaupten?

S. Daß dasjenige kleiner sey, worin entweder eine oder beyde Catheten kleiner sind.

L. Neulich haben wir schon bemerkt, daß der Umfang jeder in einen Kreis beschriebenen regulären Figur kleiner als die Peripherie dieses Kreises, der Umfang jeder um einen Kreis beschriebenen Figur aber größer als die Peripherie dieses Kreises sey. Gesetzt also, daß wir ein rechtwinkliges Dreyeck hätten, dessen eine Cathete der Peripherie eines Kreises und die andere Cathete dem Radius desselben gleich wäre; würde dieses Dreyeck größer oder kleiner seyn, als eine in den Kreis beschriebene reguläre Figur?

S. Größer. Denn eine reguläre Figur die in einen Kreis beschrieben ist, ist gleich einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete dem Umfange dieser regulären Figur, und die andere Cathete dem Radius des in sie beschriebenen Kreises gleich ist. Das reguläre Fünfeck Fig. 39 z. B. ist gleich einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete gleich ist FG + GH + HI + IK + KF und die andere = KB. Vergleicht man nun ein solches Dreyeck mit einem andern ebenfalls rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete

der

der Peripherie des Kreises, worin die reguläre Figur beschrieben worden, und die andere Cathete dem Radius desselben gleich ist; so sind beyde Catheten dieses Dreyecks und folglich auch das Dreyeck selbst größer. Fig. 39 z. B. ist nicht nur die Peripherie GHIKFG größer als FG + GH + HI + IK + KF; sondern auch KG > KB.

L. Wie aber, wenn man ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete der Peripherie eines Kreises und die andere dem Radius desselben gleich wäre, mit einer um den Kreis beschriebenen regulären Figur vergliche?

S. Dann wäre dieses Dreyeck kleiner als die um den Kreis beschriebene reguläre Figur. Denn eine um einen Kreis beschriebene Figur ist gleich einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete gleich dem Umfange dieser regulären Figur und die andere gleich dem Radius des gedachten Kreises ist. Das reguläre Sechseck Fig. 47 z. B. ist gleich einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete = AB + BC + CD + DE + EF + FA und die andere = Xa ist. Vergleicht man aber dieses Dreyeck mit dem vorhin gedachten, so ist die eine Cathete desselben und folglich auch das Dreyeck selbst größer und das andere also kleiner. Fig. 47 z. B. ist AB + BC + CD + DE + EF + FA > als die Peripherie abcdefa.

L.

1. Eine jede reguläre in einen Kreis beschriebene Figur ist also kleiner als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfang und die andere dem Radius dieses Kreises gleich ist; so wie jede um den Kreis beschriebene reguläre Figur größer als ein solches Dreyeck ist. Diese Sätze sind und bleiben wahr, was man auch für reguläre Figuren sich gedenken mag; allein je mehr Seiten die in oder um einen Kreis beschriebenen regulären Figuren haben, desto weniger sind ihre Umkreise von der Peripherie des gedachten Kreises, und im ersten Falle auch der Radius des in die Figur beschriebenen Kreises von dem Radius des um sie beschriebenen Kreises von einander unterschieden. So ist z. B. Fig. 47 der Unterschied zwischen der Peripherie des Kreises und dem Umfange des Zwölfecks kleiner als der Unterschied zwischen der Peripherie des Kreises und dem Umfange des Sechsecks, und Fig. 46 verhält es sich eben so; auch wäre hier die auf eine Seite des Zwölfecks aus dem Mittelpunkte gezogene senkrechte Linie größer als die, welche man aus eben dem Mittelpunkte auf eine Seite des Sechsecks senkrecht ziehen könnte. Wenn man sich also ein in oder um einen Kreis beschriebenes reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten gedenkt, so kann sehr leicht der Unterschied zwischen einem solchen Vielecke und einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete

dem Umfange und die andere dem Radius des in oder um das Vieleck beschriebenen Kreises gleich ist, so gering werden, daß man nicht mehr auf ihn zu achten hat; dies wird wenigstens um so viel mehr statt finden, je mehr Seiten das gedachte Vieleck hat. Gesetzt nun aber, daß man ein Vieleck von so viel Seiten in oder um einen Kreis beschrieben hätte, daß sein Unterschied von einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete dem Umfange des Kreises und die andere dem Radius desselben gleich wäre, nicht mehr in Betrachtung käme; würde alsdann dieses Vieleck auch wohl von dem Kreise selbst noch sehr verschieden seyn?

S. Nein; denn je größer die Anzahl der Seiten eines in oder um einen Kreis beschriebenen Vielecks ist, desto weniger ist es von dem Kreise selbst unterschieden.

L. Also dürften wir alsdann auch behaupten, daß ein solches Vieleck um weniger von dem Kreise unterschieden wäre, als daß es nöthig wäre, auf diesen Unterschied zu sehen. Wie groß wäre demnach ein Kreis?

S. So groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete seinem Umfange und die andere seinem Radius gleich wäre.

L. Und so verhält sichs auch in der That, ob ich gleich nicht verlange, daß Sie bloß um der eben angestellten Betrachtungen willen diesen Satz schon als wahr annehmen sollen.

Er ist viel zu wichtig, als daß wir ihn nicht auf das schärfste zu beweisen suchen müßten; und die bisher durchgenommenen Sätze werden uns dabey sehr gute Dienste leisten. Mit diesem Satze schließt sich die Untersuchung der Figuren, wenn man dabey bloß auf ihre Gleichheit sieht; und da wir bisher immer nach gründlichen Ueberzeugungen gestrebet haben, so müssen wir bey diesem lezten und wichtigsten Satze solches um so viel mehr thun. Ueberdenken Sie nun das bisherige noch für sich, und machen Sie sich insbesondere die heutigen Sätze recht geläufig. In unserer nächsten Unterredung wollen wir uns dann mit einem eigentlichen Beweise für den gedachten Satz beschäftigen.

Ein und zwanzigstes Gespräch.

L. Wenn man eine Größe, z. B. eine Linie oder Fläche, in Gedanken zu ihr selbst sezt, so nennt man solches diese Größe wiederholen. Was geht durch die Wiederholung also wohl für eine Veränderung mit einer Größe vor?

S. Sie wird größer.

L. Und doch auch desto mehr, je öfter man dieselbe zu ihr selbst sezt, oder je öfter man dieselbe wiederholt?

S. Ja.

L. Wie oft ist man denn nun wohl im Stande, eine Größe zu wiederholen?

S. So oft man will, und so oft man auch wiederholt hat, so läßt sich doch die Wiederholung noch weiter fortsetzen.

L. Wie groß kann man daher auch eine jede Größe durch die Wiederholung machen?

S. So groß als man immer will, denn man kommt darin nie zu Ende.

L. Gesetzt also, daß Sie eine Linie einen Fuß lang sich gedächten, ich mir aber eine Linie, die viele Millionen Fuß lang wäre. Könnten Sie wohl durch die Wiederholung Ihrer Linie endlich eine Linie erhalten, die größer wäre, als die meinige?

S. Warum nicht? Wenn Ihre Linie z. B. 10 Millionen Fuß lang wäre, so dürfte ich einen Fuß nur 10 Millionen und einmal gedenken; wäre Ihre Linie 100 Millionen Fuß lang, so dächte ich mir eine, die 100 Millionen und einen Fuß lang wäre u. s. w.

L. Wenn Sie nun aber anstatt eines Fußes nur einen Zoll nehmen sollten?

S. Demohnerachtet könnte ich durch die Wiederholung dieser Linie endlich eine Linie erhalten, die größer wäre; ja auch, wenn ich mir eine noch kleinere Linie gedenken sollte. Denn ich dürfte nur desto öfterer wiederholen, je kleiner die mir gegebene Linie wäre.

L. Wie aber, wenn ich mir eine noch vielmal größere Linie gedächte?

S. Auch das machte nichts aus, indem ich dann auch nur die Wiederholung öfter vorzunehmen brauchte.

L. Würde dasselbe also nicht auch stets statt finden, so klein auch die Linie, welche Sie sich gedenken sollten und so groß auch dagegen diejenige, die ich mir wählte, wäre?

S. Ja.

L. Wenn man sich also zwey Größen gedenkt, die von einerley Art oder bloß in der Größe verschieden sind, so kann man, so groß auch diese Verschiedenheit gedacht werden mag, doch immer durch die Wiederholung der kleinern endlich eine Größe erhalten, die größer ist als die andere. — Wenn man ferner eine Größe, z. B. eine Linie oder Fläche u. s. w. in eine Anzahl gleicher Theile getheilt sich denkt, und einen Theil davon nimmt, so nennt man dies die Größe theilen. Was geschieht also durch diese Theilung mit einer Größe?

S. Sie wird dadurch in eine kleinere verwandelt.

L. Und doch auch desto mehr, in je mehr gleiche Theile man sich die Größe getheilt gedacht hat?

S. Ja.

L. Und wie groß kann man sich die Anzahl dieser gleichen Theile gedenken?

S.

S. So groß als man will, man kommt, so groß man sie auch annimmt, doch nie zu Ende.

L. Also kann man auch wohl durch die Theilung einer Größe dieselbe so klein machen als man nur will?

S. Ja.

L. Also kleiner als jede Größe von eben der Art, so klein dieselbe auch angenommen ist?

S. Allerdings.

L. Gesetzt nun, daß man eine Größe auf die Art wiederholte, daß man von derselben zuvörderst das Doppelte, dann von diesem wieder das Doppelte, und so jedesmal von der Größe, welche man durch die Wiederholung erhalten hätte, das Doppelte nähme; würde man durch diese besondere Art der Wiederholung nicht auch aus jeder noch so kleinen Größe eine jede andere noch so große von eben der Art erhalten können?

S. Wenn man die Wiederholung so weit fortsetzen kann, als man will, allerdings.

L. Und wenn man auf die Art theilte, daß man zuerst die Größe selbst halbirte, dann den einen dieser Theile, und so ferner immer die durch die lezte Theilung erhaltene Größe; was würde dann seyn?

S. Alsdann könnte man durch die fortgesetzte Theilung eine so kleine Größe erhalten, als man nur immer wollte.

L. Wie aber wenn man jedesmal zwey ungleiche Theile machte, und den kleinern immer weiter theilte?

S. Dann erreichte man eben dasselbe nur noch geschwinder.

L. Was geschieht nun mit dem Unterschiede zwischen einer in einen Kreis beschriebenen Figur und dem Kreise, wenn man anstatt jener regulären Figur eine andere nimmt, die doppelt so viel Seiten hat?

S. Der Unterschied wird um mehr als um die Hälfte kleiner.

L. Und wenn man nun noch eine reguläre Figur in den Kreis beschrieben gedächte, die abermals doppelt so viel Seiten hätte?

S. Dann würde der zweyte Unterschied ebenfalls um mehr als die Hälfte kleiner.

L. Und wenn man auf eine ähnliche Art in der Verdoppelung der Seiten der in den Kreis beschriebenen regulären Figur fortgienge?

S. So könnte man den Unterschied zwischen ihr und dem Kreise so klein erhalten, als man nur immer wollte.

L. Also auch kleiner als jede gegebene bestimmte Größe?

S. Ja.

L. Wie ist es nun aber mit dem Unterschiede zwischen einer um den Kreis beschriebenen regulären Figur und dem Kreise, wenn man auch hier die Seiten der regulären Figur nach und nach verdoppelt?

S.

S. Auch dieser Unterschied wird bey jeder Verdoppelung der Seiten der um den Kreis beschriebenen regulären Figur um mehr als die Hälfte vermindert, und man kann denselben durch die Fortsetzung dieser Verdoppelung so klein erhalten, als man will.

L. Also ebenfalls kleiner als jede gegebene Größe?

S. Ja.

L. Folglich kann man sich doch auch so wohl in als um einen jeden Kreis eine reguläre Figur gedenken, deren Unterschied vom Kreise weniger beträgt, als jede angegebene Größe, so klein dieselbe auch genommen seyn mag?

S. Ja.

L. Wie groß sollte nach dem Schlusse unserer lezten Unterredung ein jeder Kreis seyn?

S. So groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete seinem Umfange und die andere seinem Radius gleich wäre.

L. Jetzt sind wir im Stande uns von der Wahrheit dieses Satzes auf das strengste zu überzeugen. Denn wäre der Kreis nicht einem solchen Dreyecke gleich; so wäre das Dreyeck entweder größer oder kleiner als der Kreis; nicht?

S. Allerdings.

L. Und wenn nun das Dreyeck größer wäre als der Kreis, könnte man dann sich nicht um den Kreis eine reguläre Figur beschrieben gedenken, deren Unterschied vom Kreise gerin-

ger, und sie selbst also auch kleiner wäre als das gedachte Dreyeck?

S. Ja.

L. Wie groß wäre aber diese reguläre Figur nach der neulich erlernten Bestimmung?

S. Größer als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange des Kreises und die andere dem Radius desselben gleich wäre.

L. Kann dies mit dem vorhergehenden bestehen?

S. Nein, denn sonst wäre die um den Kreis beschriebene reguläre Figur sowohl kleiner als größer, denn ein und dasselbe rechtwinklige Dreyeck.

L. Was folgt daraus?

S. Daß ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange eines Kreises und die andere dem Radius desselben gleich ist, nicht größer seyn könne als der Kreis.

L. Aber vielleicht kann es kleiner seyn als der Kreis?

S. Auch das ist unmöglich. Denn wäre dies, so könnte man in dem Kreise eine reguläre Figur sich gedenken, die von dem Kreise um noch weniger unterschieden und also größer wäre als das gedachte Dreyeck. Eine solche Figur wäre aber nach der neulich erlernten Bestimmung kleiner als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange und die andere dem Radius des Kreises gleich wäre.

Es wäre also auch hier eine Figur theils größer theils kleiner als eine und dieselbe andere, und das ist unmöglich. Es muß also ein Kreis gleich seyn einem rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Cathete seinem Umfange und die andere seinem Radius gleich ist.

L. So weit wären wir also nunmehr gekommen, daß wir nicht nur die regulären Figuren, sondern selbst einen Kreis mit einem rechtwinkligen Dreyecke zu vergleichen im Stande wären. Schon längstens haben wir Parallelogramme und Dreyecke unter einander verglichen, und wenden wir das dabey erlernte hier an, so wird es daher nun auch leicht seyn, die regulären Figuren mit Parallelogrammen und insbesondere mit Rechtecken und Quadraten zu vergleichen. Wenn waren nemlich ein Parallelogramm und ein Dreyeck gleich?

S. Wenn das Dreyeck eine doppelt so große Grundlinie hatte und beyde zwischen einerley Parallelen gelegt werden konnten.

L. Sollte sich dieser Satz nicht für den Fall noch auf eine andere Art ausdrucken lassen, wenn das Parallelogramm ein Rechteck und das Dreyeck ein rechtwinkliges Dreyeck ist?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ja; ein Rechteck ist nemlich so groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, wenn die eine Seite desselben der einen Cathete des Dreyecks gleich, die andere Seite

aber nur halb so groß als die andere Cathete des Dreyecks ist.

L. Wie groß wird also eine jede reguläre Figur seyn, wenn man dieselbe nach einem Rechtecke bestimmen soll?

S. So groß als ein Rechteck, dessen eine Seite dem Umfange der regulären Figur und die andere dem halben Radius des in sie beschriebenen Kreises gleich ist.

L. Und wie groß der Kreis?

S. So groß als ein Rechteck, dessen eine Seite dem Umfange des Kreises und die andere dem halben Radius desselben gleich ist.

L. Wenn wir also im Stande wären, eine gerade Linie zu ziehen, die so groß wäre, als der Umfang eines gegebenen Kreises; so könnten wir jeden gegebenen Kreis in ein Rechteck und dann auch in ein Quadrat, auf die bey der Vergleichung der Rechtecke unter einander erklärte Art, verwandeln; so wie wir solches mit jeder gegebenen geradlinigen Figur wirklich zu thun im Stande sind. Aber die Verwandlung des Umfangs eines Kreises in eine gerade Linie ist hier noch zu schwer, und wir können daher jezt die Untersuchung der Figuren, die in oder um einen Kreis beschrieben sind, so wie auch die ganze Untersuchung der Gleichheit und Ungleichheit der ebenen Figuren beschließen, denn das Ziel zu welchem man bey dieser Untersuchung hineilt, ist eben die Verwandlung dieser Figuren in ein Quadrat.

drat. Bey unsern künftigen Beschäftigungen mit der Geometrie werden wir also eine andere Absicht uns vorsetzen müssen als bey den bisherigen, und zwar die, daß wir die Aehnlichkeit der Figuren eben so uns bekannt machen, als wir solches bis jetzt mit der Gleichheit derselben gethan haben. Ehe wir aber die Aehnlichkeit der Figuren selbst betrachten, müssen wir zuvor einen andern dabey öfters vorkommenden Gegenstand erforschen und uns geläufig machen, und dies soll meine Absicht bey unserer nächsten Unterredung seyn.

Zwey und zwanzigstes Gespräch.

1. Der Gegenstand, mit dem wir uns bekannt machen müssen, ehe wir die Aehnlichkeit der Figuren zu untersuchen anfangen können, ist die Proportionalität gerader Linien. Wenn von der Proportionalität gerader Linien gesprochen wird, so ist jedesmal die Rede von vier Linien, und es sind dieselben proportional, wenn die erste aus der zweyten eben so entsteht als die dritte aus der vierten, oder welches dasselbe ist, wenn die zweyte aus der ersten eben so entsteht, wie die vierte aus der dritten. Betrachten Sie die vier geraden Linien AB, CD, EF, und GH Fig. 53. Es sind dieselben proportional, wenn entweder AB eben so aus CD entsteht wie EF aus GH, oder wenn

CD eben so aus AB als GH aus EF hervorgebracht werden kann. Im allgemeinen ist dies sehr leicht; allein es muß genauer entwickelt werden, damit man davon auch die Anwendung in besondern Fällen zur Beurtheilung der Proportionalität gegebener gerader Linien machen könne. Wie kann also eine Linie aus der andern entstehen?

S. Auf zweyerley Art; entweder durch die Wiederholung oder durch die Theilung.

L. Durch die Wiederholung einer geraden Linie ist man zwar allezeit, wie wir in unserer lezten Unterredung gesehen haben, im Stande, eine gerade Linie zu erhalten, die größer ist als jede gegebene Linie, so wie durch die Theilung eine andere, die kleiner ist als jede gegebene; allein kann man auch durch die Wiederholung oder Theilung einer geraden Linie jedesmal eine andere erhalten, die genau so groß ist, als eine gegebene?

S. Das folgt wenigstens nicht.

L. Kann ein Kaufmann die Länge eines Stücks Tuch allezeit durch ganze Ellen bestimmen?

S. Nein, sondern er muß es auch oft noch durch halbe oder Viertheile oder Achttheile einer Elle thun.

L. Eben so können überhaupt manche gerade Linien aus andern nicht durch die Wiederholung dieser Linien selbst, sondern nur durch die Wiederholung eines Theils derselben entstehen,

stehen, und je kleiner man einen solchen Theil nimmt, desto genauer ist man im Stande, dadurch eine andere Linie zu bestimmen oder durch die Wiederholung hervorzubringen. Ja es giebt gerade Linien die auch durch die Wiederholung eines Theils einer andern Linie, so klein man denselben auch nimmt, doch nie genau hervorgebracht werden können, und man nennt dergleichen Linien in Vergleichung mit denen, durch deren Wiederholung sie nicht genau hervorgebracht werden können, incommensurabele Linien. Wir wollen nun zuvörderst solche Linien betrachten, davon die eine aus der andern durch die Wiederholung derselben oder eines gleichen Theils von ihr genau hervorgebracht werden kann; und hier entsteht zuerst die Frage, was nöthig sey, um sich von der Entstehungsart Einer geraden Linie aus einer andern einen ganz bestimmten Begriff machen zu können?

S. Man muß zuvörderst wissen, ob sie durch die Wiederholung der Linie selbst oder durch die Wiederholung eines Theils derselben entstanden sey, und im leztern Fall überdem, was dies für ein Theil ist; und dann muß auch bekannt seyn, wie oft die gegebene Linie oder ein Theil derselben habe wiederholt werden müssen.

L. Und wann entstehen nun zwey gerade Linien auf einerley Art aus zwey andern? Wenn

Wenn entsteht z. B. Fig. 53 DC eben so aus AB als HG aus FE?

S. Wenn man entweder AB selbst so vielmal hat wiederholen müssen, um DC zu erhalten, als FE selbst wiederholt werden mußte, um dadurch HG zu bekommen; oder wenn DC und HG durch einerley Wiederholung eines gleichnamigen Theils von AB und FE hervorgebracht werden können.

L. Wenn eine gerade Linie durch die Wiederholung einer andern genau aus derselben hervorgebracht werden kann, so kann solches auch durch die Wiederholung eines Theils derselben geschehen; und man kann also auch überhaupt sagen, daß zwey gerade Linien aus zwey andern auf einerley Art entstehen, wenn sie durch einerley Wiederholung eines gleichnamigen Theils dieser Linien hervorgebracht werden. Gesetzt also daß man von vier geraden Linien, von denen man bestimmen soll, ob sie proportional sind oder nicht, die erste und dritte in eine gleiche Anzahl Theile theilte, und dann die zweyte einen Theil der ersten eben so oft enthielte, als die vierte einen Theil der dritten; würden dann diese Linien in dieser Ordnung proportional seyn oder nicht?

S. Allerdings würden sie es seyn, denn es würden alsdann die zweyte und vierte aus einem gleichnamigen Theile der ersten und dritten durch einerley Wiederholung hervorgebracht, und es entstünde also die zweyte

aus der ersten, so wie die vierte aus der dritten.

1. Wenn wir nach diesen Grundsätzen über die Proportionalität gegebener gerader Linien urtheilen wollen; so müssen wir im Stande seyn, eine jede gegebene gerade Linie in eine jede Anzahl gleicher Theile zu theilen. Denn wenn auch eine gerade Linie gegen eine andere nicht incommensurabel ist, so läßt sie sich doch nicht immer durch die Wiederholung der andern Linie selbst oder eines jeden Theils von ihr genau hervorbringen. Enthielte z. B. eine Linie von einer andern $\frac{2}{7}$; so könnte man dieselbe aus dieser andern weder durch die Wiederholung der ganzen Linie, noch auch durch die Wiederholung der Hälfte, eines Drittheils, eines Viertheils dieser Linie u. s. w. sondern man müßte sie aus ihr durch die Wiederholung des siebenten Theils derselben entstehen lassen. Ehe wir also weiter gehen, müssen wir uns die Art und Weise, eine jede gegebene gerade Linie in jeder Anzahl gleicher Theilen zu theilen bekannt machen. Betrachten Sie die 54ste Figur. AB ist daselbst unbegränzt gezogen, und in A mit ihr die begränzte Linie AC verbunden worden. Ferner sind auf der unbegränzten Linie AB die Linien AD, DE, EF, FG, GH, HI unter einander gleich, übrigens aber von willkührlicher Größe genommen, aus I nach C die gerade Linie IC und mit dieser durch die Punkte

D,

D, E, F, G, H parallele Linien gezogen. Was ist nun durch diese parallele Linien mit der Linie AC geschehen?

S. Sie ist dadurch in eben so viel Theile getheilt worden, als gleiche Theile auf AB genommen waren.

L. Und wie scheinen Ihnen diese Theile der Linie AC beschaffen zu seyn?

S. Einander gleich.

L. Sind sie es nicht auch wirklich? Nehmen Sie die 55ste Figur zu Hülfe, in welcher KP ⋕ DE, LQ ⋕ EF, MR ⋕ FG, NS ⋕ GH und OT ⋕ HI ist.

S. (Nach einigem Nachdenken) Ja. Denn da Fig. 55 HO, GN, FM, EL und DK mit IC parallel gezogen worden; so sind auch alle diese Linien unter einander parallel. Da nun

DK ⋕ EP und
KP ⋕ DE; so ist auch
KP = DE. Eben so ist
LQ = EF, weil
EL ⋕ FQ und
LQ ⋕ EF; ferner
MR = FG
NS = GH und
OT = HI aus ähnlichen Gründen.

Da nun auch AD = DE = EF = FG = GH = HI; so ist auch KP = LQ = MR = NS = OT und überhaupt AD, DE, EF, FE, GH, HI, KP, LQ, MR, NS, OT unter einander gleich. Ist dies, so ist

△ ADK = △ KPL, weil
AD = KP
AKD = KLP und
ADK = KPL; denn AKD ist ein äusserer und KLP ein innerer gegenüber stehender Winkel der Parallelen DK und EL, welche von AC geschnitten werden; und ADK = DEP = KPL, weil DK ⋕ EL und DE ⋕ KP. Folglich ist auch
AK = KL. Ferner ist
△KPL = △ LQM, weil
KP = LQ
KLP = LMQ und
KPL = LQM. KLP ist = LMQ weil EL ⋕ FM; und KPL = LQM, weil KPL = DEL = EFM = LQM. Daher ist also
KL = LM.
Auf eben diese Art läßt sich ferner zeigen, daß
LM = MN
MN = NO und
NO = OC; und aus allen diesen Folgen fließt, daß AK = KL = LM = MN = NO = OC.

L. Sie hätten diesen Beweis auch auf eine kürzere Art führen können, indem Sie mit einem Male gezeigt hätten, daß in allen folgenden Dreyecken ADK, KPL, LQM, MRN, NSO, OTC eine Seite und zwey ähnlich liegende Winkel, und also auch alle diese Dreyecke unter einander, gleich seyn, und also auch AK

= KL = LM = MN = NO = OC seyn müsse. In der 55sten Figur ist also die Linie AC in sechs gleiche Theile getheilt. In wie viel gleiche Theile würde AC getheilt worden seyn, wenn man auf AB acht gleiche Linien anstatt sechs genommen hätte, und übrigens auf gleiche Art verfahren wäre?

S. In acht gleiche Theile.

L. Und wenn man auf AB zwölf gleiche Linien genommen hätte?

S. Dann wäre AC in zwölf gleiche Theile getheilt worden.

L. Also würde die Linie AC immer in so viel gleiche Theile getheilt, als man gleiche Linien auf AB genommen hätte. Scheint es Ihnen nun also möglich, eine jede gerade Linie in jede Anzahl gleicher Theile zu theilen?

S. Da AB unbegränzt ist, und man also so viel gleiche Linien darauf nehmen kann als man will, so ist es allerdings möglich, wenigstens läßt die Art, wie man es machen muß, sich deutlich denken.

L. Und wie theilt man eine gegebene gerade Linie in eine verlangte Anzahl gleicher Theile?

S. Man verbindet mit ihr in einem ihrer Endpunkte eine andere gerade und unbegrenzte Linie, nimmt auf dieser so viel gleiche Linien von willkührlicher Größe als die gegebene gerade begrenzte Linie Theile erhalten soll, zieht durch den Endpunkt der lezten der gedachten gleichen Linie und durch den andern Endpunkt

der

der zu theilenden Linie eine dritte Linie, und mit dieser endlich Parallelen durch alle Endpunkte der auf der unbegrenzten geraden Linie genommenen gleichen Linien. Um die Linie AC Fig. 54 z. B. in sechs gleiche Theile zu theilen, verbindet man mit ihr in A die unbegrenzte gerade Linie AB, nimmt auf dieser AD = DE = EF = FG = GH = HI, zieht IC, und legt durch H, G, F, E und D mit IC Parallelen.

L. Fig. 56 sey in dem Dreyecke ABC die Linie DE mit BC parallel gezogen, und DB könne aus AD durch die Wiederholung eines Theils dieser Linie genau hervorgebracht werden, oder es sey DB durch AD commensurabel, denn auf diese Art druckt man dies auch aus. Ferner denken Sie sich AD in solche Theile getheilt, durch deren Wiederholung DB genau hervorgebracht werden kann, und DB aus dergleichen Theilen zusammen gesetzt. Wenn man nun durch alle auf diese Art in AD und BD entstehende Punkte sich Linien gelegt gedenkt, die mit DE oder BC parallel laufen; was geschieht dann mit AE und EC?

S. Beyde Linien werden dadurch in lauter gleiche Theile getheilt.

L. Und wie viel Theile enthält AE?

S. So viel als AD.

L. Und EC?

S. So viel als DB.

L. Und was läßt sich also nun wohl von den Linien AD, DB, AE und EC behaupten?

S. Weiter nichts als was ich gesagt habe.

L. Nicht auch, daß sie in der Ordnung, in welcher ich sie angeführt habe, proportional sind?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ja, auch dies. Denn AD und AE sind in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt, und DB enthält einen Theil von AD so vielmal als EC einen Theil von AE enthält.

L. Würde z. B. AD in 30 gleiche Theile getheilt und durch die Theilungspunkte mit DE Parallelen gezogen, so würde dadurch AE getheilt werden?

S. Ebenfalls in 30 gleiche Theile.

L. Und wenn alsdann DB einen Theil von AD 45mal enthielte, und man dächte sich diese 45 gleiche Theile der Linie DB und durch die Theilungspunkte ebenfalls mit DE oder BC Parallelen gezogen?

S. Dann enthielte EC einen Theil von AE 45mal.

L. Wenn man also in einem Dreyecke mit einer Seite desselben eine parallele Linie so zieht, daß die dadurch entstandenen Theile der einen Seite commensurabel gegen einander sind; so sind die Theile beyder durch die gezogene Parallele getheilten Seiten in der Ordnung proportional, wenn der erste Theil der einen Seite die erste, der andere Theil der ersten Seite die

zwey=

zweyte, der erste Theil der andern Seite die dritte und der andere Theil der andern Seite die vierte Linie ist. Wenn man die kurz anzeigen will, so schreibt man es

AD : DB = AE : EC, und lieset dies AD verhält sich zu DB wie AE zu EC. — Verhält sich nun aber, wenn

AD : DB = AE : EC;

nicht auch

DB : AD = EC : AE?

S. Ja; denn wenn DB und EC in eine gleiche Anzahl von Theilen getheilt werden; so enthält AD einen Theil von DB so vielmal als AE einen Theil von EC enthält.

L. Und verhält sich dann nicht auch

AD : AB = AE : AC oder

DB : AB = EC : AC?

S. Ja; denn wenn man auch hier die erste und dritte Linie in eine gleiche Anzahl gleicher Theilen theilt; so enthält die zweyte Linie einen Theil der ersten Linie eben so vielmal als die vierte einen Theil der dritten Linie enthält.

L. Wenn Fig. 56 AD und BD gegen einander commensurabel sind, so sind es AE und EC ebenfalls: und wenn also wie Fig. 57 auch durch D mit AC eine parallele Linie gezogen, oder wie Figur 58 EF durch E mit AB parallel gelegt wird; so sind auch BF und FC Fig. 57, und CF und FB Fig. 58 gegen einander commensurabel. Was finden also Fig. 57 für

Proportionen ausser den schon angeführten statt?

S. Folgende.

1. BD : DA = BF : FC
2. BD : BA = BF : BC
3. AD : DB = FC : FB und
4. AD : AB = CF : CB.

L. Und Fig. 58?

S. Diese.

1. CE : EA = CF : FB
2. CE : CA = CF : CB
3. AE : EC = BF : FC und
4. AE : AC = BF : BC.

L. Was sind aber die Vierecke DECF Fig. 57 und DEFB Fig. 58 für Figuren?

S. Parallelogramme.

L. Und darin ist also?

S. Fig. 57 ist

DE = FC und
EC = DF; und Fig. 58
DE = BF und
EF = DB.

L. Wenn Sie hiernach die angeführten Proportionen veränderten, welche würden Sie dann erhalten?

S. Fig. 57

1. BD : DA = BF : DE
2. BD : DA = BF : BC
3. AD : DB = DE : FB und
4. AD : AB = DE : BC; u. Fig. 58
1. CE : EA = CF : DE

2. $CE : CA = CF : CB$
3. $AE : EC = DE : FC$ und
4. $AE : AC = DE : BC$.

L. Die vierten Proportionen merken Sie sich vorzüglich; denn bey der Vergleichung der 56sten, 57sten und 58sten Figur wissen wir durch sie, daß, wenn Fig. 56 DE ⫲ BC und AD und DB gegen einander commensurabel sind, nicht nur

1. $AD : DB = AE : EC$
2. $DB : AD = EC : AE$
3. $AD : AB = AE : AC$ und
4. $DB : AB = EC : AC$; sondern auch
5. $AD : AB = DE : BC$ und
6. $AE : AC = DE : BC$.

Und hier wollen wir für heute die Betrachtung der proportionalen Linien schließen. Das, wovon wir uns nun zu überzeugen haben, ist, daß wenn Fig. 56 DE ⫲ BC,

$$AD : DB = AE : EC,$$

wenn auch DB gegen AD incommensurabel ist; und wenn wir davon überzeugt sind, so können wir uns dann mit der Art, aus gegebenen Proportionallinien andere herzuleiten, bekannt machen. Vorher aber wird es sehr gut seyn, wenn Sie sich durch eine sorgfältige Wiederholung das heutige recht geläufig zu machen suchen werden.

Drey und zwanzigstes Gespräch.

1. Nun müssen wir untersuchen, ob auch in dem Falle, wenn in einem Dreyecke mit einer Seite eine parallele Linie gezogen ist, welche die beyden übrigen Seiten in zwey gegen einander incommensurabele Theile theilt, diese Theile unter einander proportional sind? Ist dies, so können wir allgemein behaupten, daß, wenn in einem Dreyecke mit einer Seite eine parallele Linie gezogen wird, die beyden übrigen Seiten in proportionale Theile getheilt werden; und dieser Satz wird uns dann sowohl bey der Untersuchung der Aehnlichkeit der Figuren als auch bey der Beurtheilung der Proportionalität gegebener gerader Linien sehr wichtige Dienste leisten. Es sey also Fig. 59 in dem Dreyecke ABC

DE ∦ BC und

AD gegen DB incommensurabel.

Bey diesen Bedingungen kann man, in was für und in wie viel gleiche Theile auch AD getheilt werde, doch nie die Linie BD durch die Wiederholung eines Theils der AD genau hervorbringen. Aber möglich ist es dagegen allezeit, durch die Wiederholung eines Theils der AD zwey gerade Linien zu erhalten, die beyde nur um diesen Theil einmal genommen unterschieden sind, und wovon die eine kleiner und die andere

größer

größer ist als DB. Theilt man z. B. Fig. 59 AD in drey Theile, so erhält man, wenn man einen dieser Theile viermal nimmt, DF $<$ DB, und, wenn man ihn fünfmal wiederholt, DG $>$ DB, und DG — DF = $\frac{1}{3}$ AD. Theilte man AD in dreyßig Theile, so wäre einer dieser Theile 42mal genommen kleiner und 43mal genommen größer als DB; theilte man AD in 300 Theile, so wäre DB größer als einer dieser Theile 424, und kleiner als derselbe 425mal genommen u. s. w. Hiebey fällt zugleich in die Augen, daß die beyden Linien, welche man auf die gedachte Art durch die Wiederholung eines Theils der AD erhält, der BD immer näher kommen, in je mehr Theile man sich die AD getheilt gedenkt, und daß man den statt findenden Unterschied durch fortgesetzte Theilung der AD kleiner machen könne, als jede Linie, die sich nur denken läßt. Dies vorausgesetzt, so sey Fig. 60 AD in drey gleiche Theile in H, I und D getheilt, und DK = KL = LM = MF = FG = $\frac{1}{3}$AD, und DF = $\frac{4}{3}$ AD $<$ DB, so wie DG = $\frac{5}{3}$ AD $>$ DB gemacht. Wenn man nun AC verlängert, und durch H, I, K, L, M, F und G mit BC oder DE parallele Linien zieht; so wird einmal AE in eben so viel gleiche Theile getheilt, als AD getheilt ist, ferner wird ES = $\frac{4}{3}$ AE $<$ EC und ET = $\frac{5}{3}$ AE $>$ EC, und ET — ES = $\frac{1}{3}$ AE. Würde also das Dreyeck AFS, worin DE ‡ FS, gedacht, so wäre

AD : DF = AE : ES, und

nähme man das Dreyeck AGT, worin DE ∓ GT, so wäre

AD : DG = AE : ET.

Haben Sie dies alles verstanden?

S. O ja.

L. Gesetzt nun, daß AD in dreyßig Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte Parallelen mit DE gezogen worden wären; was wäre dann mit AE geschehen?

S. AE wäre dadurch auch in dreyßig gleiche Theile getheilt worden.

L. Und wie viel Theile der AD enthielte nun DB?

S. Mehr als 42 und weniger als 43.

L. Und EC Theile der AE?

S. Ebenfalls mehr als 42 und weniger als 43.

L. Und was könnte man nun für Proportionen annehmen?

S. Diese beyde

$AD : \frac{42}{30} AD = AE : \frac{42}{30} AE$, und

$AD : \frac{43}{30} AD = AE : \frac{43}{30} AE$.

L. Und der Unterschied der Linie DB von $\frac{42}{30}$ AD oder $\frac{43}{30}$ AD wäre doch auch geringer als der Unterschied eben dieser Linie von DF oder DG?

S. Allerdings; so wie auch der Unterschied der Linie EC von $\frac{42}{30}$ AE oder $\frac{43}{30}$ AE nicht mehr so groß wäre, als der Unterschied derselben Linie von ES oder ET.

L. Gesetzt ferner, daß man AD in 300 Theile getheilt hätte, und übrigens eben so verführe als vorhin; was ließe sich dann behaupten?

S. Einmal daß auch AE in 300 gleiche Theile getheilt worden; zweytens, daß DB $> \frac{424}{300}$ AD und $< \frac{425}{300}$ AD, desgleichen EC $> \frac{424}{300}$ AE und $< \frac{425}{300}$ AE; drittens daß

$$AD : \tfrac{424}{300} AD = AE : \tfrac{424}{300} AE$$ und

$$AD : \tfrac{425}{300} AD = AE : \tfrac{425}{300} AE,$$ und

viertens daß DB von $\frac{424}{300}$ AD oder $\frac{425}{300}$ AD, so wie auch EC von $\frac{424}{300}$ AE oder $\frac{425}{300}$ AE um weniger unterschieden sey, als DB von $\frac{42}{30}$ AD oder $\frac{43}{30}$ AD, und EC von $\frac{42}{30}$ AE oder $\frac{43}{30}$ AE es war.

L. Auf diese Art läßt sich nun immer weiter schließen, und der Unterschied der Linien DB und EC und der durch die Wiederholung eines Theils der Linien AD und AE entstandenen Gränzen so klein machen als man will, und kleiner als jede gegebene Linie. Hat man nun durch die Wiederholung eines Theils der AD eine Linie hervorgebracht, die zunächst kleiner ist als DB, das heißt von DB um weniger als diesen Theil einmal genommen unterschieden; so giebt eine gleiche Wiederholung eines gleichnamigen Theils der AE eine Linie die zunächst kleiner als EC ist: und ist durch die Wiederholung eines Theils der AD eine Linie entstanden, die zunächst größer als DB ist, so giebt eine gleiche Wiederholung

eines

eines gleichnamigen Theils der AE eine Linie die zunächst größer als EC ist. Diese zunächst kleinere oder größere Linien als DB und EC sollen nun die Grenzen heißen, zwischen welchen diese Linien DB und EC liegen, und die kleinern die nähern so wie die größern die entferntern Grenzen. Den Unterschied beyder kann man, wie aus dem vorhergehenden ersehen werden kann, kleiner machen als jede gegebene Größe, und dann darf man die zwischen sie fallende Linie statt der gleichnamigen Grenzen nehmen. Nun ist allezeit, wenn Fig. 59 DE ⧺ BC und DB incommensurabel gegen AD ist,

AD : AE = die nähere Grenze von DB : nähern Grenze von EC und

AD : AE = die entf. Grenze von DB : entf. Grenze von EC; und da der Unterschied beyder Arten Grenzen ohne Ende kleiner gemacht werden kann, so ist auch

AD : AE = DB : EC; und es ist also allgemein, wenn in einem Dreyecke ABC Fig. 59 DE ⧺ BC,

AD : AE = DB : EC, es mag DB gegen AD commensurabel oder incommensurabel seyn.

S. Verstanden habe ich alles, allein ganz übersehen kann ich diesen Beweis noch nicht.

L. Wegen seiner Weitläuftigkeit erreicht man auch die Uebersicht des Ganzen nicht leicht mit einem Male, indeß wird eine fleis-

sige und sorgfältige Wiederholung auch diese Uebersicht Ihnen verschaffen. — Wenn nun Fig. 59

AD : AE = DB : EC;

ist nicht alsdann auch

AE : AD = EC : DB?

S. Ja; denn wenn man, anstatt daß vorher AD zuerst in eine Anzahl gleicher Theile getheilt wurde, AE zuerst so theilt, so lassen sich alle vorher gemachten Schlüsse wieder anbringen und beweisen, daß

AE : AD = EC : DB.

L. Und was würde man für Proportionen erhalten, wenn man statt DB und EC die Seiten AB und AC nähme, und überdem, wie Fig. 57 und 58, entweder durch D, DF ∦ AC oder durch E, EC ∦ AB gedächte?

S. Diese drey:

AD : AE = AB : AC

AD : DE = AB : BC und

AE : DE = AC : BC.

L. Nun nehmen Sie an, daß Fig. 61 in den beyden Dreyecken ABC und DEF

B = E

C = F und

A = D sey. Ferner sey, wie Fig. 62, in dem Dreyecke ABC, BC verlängert und

CH = EF

CG = ED und

GH = DF, und also das Dreyeck

GCH

GCH dem Dreyecke DEF gleich gemacht. Wie ist nun die Lage der Seiten des kleinern Dreyecks GCH gegen die Seiten des größern ABC beschaffen?

S. Es ist sowohl GC ⋕ BA als GH ⋕ AC. Denn es ist Fig. 62 und 61

GCH = E
E = B, also
GCH = B und daher
GC ⋕ BA. Ferner ist
GHC = F
F = ACB und also
GHC = ACB und daher
GH ⋕ AC.

L. Wenn man also, wie Fig. 63 geschehen ist, BA und HG verlängert, so schneiden sich, weil $B + H < 2R$ ist, diese Verlängerungen, hier in I; und was ist nun AIGC für ein Viereck?

S. Ein Parallelogramm, indem CG ⋕ AI und IG ⋕ AC ist.

L. Was sind daher auch für Linien gleich?

S. Es ist CG = AI und IG = AC.

L. Was finden nun, da in dem Dreyecke AIH, CG ⋕ BI und AC ⋕ IH ist, hier für Proportionen statt?

S. Diese:

BA : BC = AI : CH und
BC : IG = CH : GH.

L. Und wie lassen sich diese Proportionen verändern, da AI = CG und IG = AC ist?

S.

S. Sie lassen sich in diese verwandeln:
$BA : BC = CG : CH$ und
$BC : AC = CH : GH$.

L. Vorhin bemerkten wir, daß
$CH = EF$ und
$CG = ED$ und
$GH = DF$ sey; was giebt dies noch für Veränderungen an die Hand?

S. Hiernach kann man die angeführten Proportionen auch so ausdrucken:
$BA : BC = ED : EF$
$BC : AC = EF : DF$.

L. Nun habe ich noch Fig. 64 durch A die Linie $AK \mathrel{\#} BH$ gezogen. Was wissen Sie durch diese Linie?

S. Erstlich, daß
$\triangle AIK = \triangle CGH = \triangle EDF$, weil
$AI = CG = ED$
$IAC = GCH = DEF$ und
$AIK = CGH = EDF$, und also auch
$IK = GH = DF$ und
$AK = CH = EF$ sey. Ferner daß AKHC ein Parallelogramm und also auch $AC = KH$ sey. Endlich daß
$BA : KH = AI : IK$ oder
$BA : AC = AI : IK$ oder
$BA : AC = CG : CH$ oder
$BA : AC = ED : DF$.

L. Wenn also in zwey Dreyecken alle Winkel des einen den Winkeln des andern stück-

weise

weise genommen, gleich sind, so sind die Seiten beyder Dreyecke einander proportional. Denn in den beyden Dreyecken ABC und DEF Fig. 61 ist, weil

$$B = E$$
$$C = F \text{ und}$$
$$A = D;$$
$$BA : BC = ED : EF$$
$$BC : AC = EF : DF \text{ und}$$
$$BA : AC = ED : DF.$$

Eben dasselbe läßt sich auch noch auf eine andere Art erweisen. Denn wenn Fig. 61 und 65

$$\triangle ABC = \triangle ABC \text{ und}$$
$$AG = DE \text{ und}$$
$$AH = DF$$

gemacht worden ist; so ist, weil auch

$$A = D, \text{ ebenfalls}$$
$$\triangle AGH = \triangle DEF,$$

u. folglich auch

$$AGH = E = B \text{ und}$$
$$AHG = F = C \text{ und}$$
$$GH = EF, \text{ und}$$
$$GH \not\parallel BC.$$

Was ergeben sich also hier Fig. 65 für Proportionen?

S. Diese:

$$AG : AH = AB : AC$$
$$AG : GH = AB : BC \text{ und}$$
$$AH : GH = AC : BC.$$

L. Und wenn Sie statt AG, DE, statt AH DF und statt GH, EF setzen?

S.

$$ED : DF = AB : AC$$
$$ED : EF = AB : BC$$
$$DF : EF = AC : BC.$$

L. Hier haben wir ebenfalls drey Proportionen und darin dieselben Linien nur in einer andern Ordnung. Diese Verschiedenheit der Ordnung hindert aber nicht, daß nicht diese Proportionen mit den vorhergehenden einerley wären, wenn gleich in andern Fällen die Veränderung der Ordnung unter proportionalen Linien die Proportionalität ganz aufheben kann. In unserer nächsten Unterredung sollen Sie hierüber mehr Unterricht erhalten.

Vier und zwanzigstes Gespräch.

L. Wenn man von einer geraden Linie weiß, sowohl aus was für einer andern geraden Linie, als auch wie sie aus derselben durch die Wiederholung entstanden ist; so hat man von derselben einen deutlichen und bestimmten Begriff: man ist dabey nicht mehr als eine einzige gerade Linie sich zu gedenken im Stande. Würde z. B. von der Linie HG Fig. 53 gesagt, daß sie aus der Linie FE durch die Wiederholung entstünde, wenn man den fünften Theil von FE sechszehnmal nähme; so paßte diese Beschreibung auf nicht mehr als auf eine einzige gerade Linie, und der durch diese Be-

schreibung erhaltene Begriff wäre durchaus bestimmt. Sollte daher nicht auch die Beschreibung einer geraden Linie auf einen durchaus bestimmten Begriff führen, wenn man sagte, daß sie die vierte Proportionallinie zu dreyen andern sey, und diese drey Linien und ihre Ordnung gegeben wären?

S. Ja; denn man lernt dadurch nicht nur aus was für einer Linie, sondern auch durch was für eine Wiederholung diese vierte Proportionallinie aus derselben entsteht. Wenn z. B. die Linien AB, DC und FE Fig. 53 gegeben wären, und gesagt würde, daß

$$AB : DC = FE : GH$$

seyn sollte; so wüßte man, theils daß GH aus FE entstehen sollte, theils auch wie die Entstehungsart derselben beschaffen wäre, indem GH aus FE eben so wie DC aus AB entstehen soll, und GH wäre also durchaus bestimmt.

1. Wenn in einem Dreyecke wie Fig. 59 DE ⫲ BC gezogen worden; so ist unter andern auch

$$AD : AB = AE : AC$$ oder

$$AB : AD = AC : AE,$$ und diese Proportionen finden statt, wenn

$$AD : DB = AE : EC$$ oder

$$DB : AD = EC : AE;$$ so daß man jene auch aus diesen herleiten kann. Gesetzt nun, daß man in diesem Dreyecke ABC nicht zuerst DE ⫲ BC gezogen, sondern AB und AC in D und E so getheilt hätte, daß

AD

$AD : DB = AE : EC$ oder
$AD : AB = AE : AC$ und
$AB : AD = AC : AE$

geworden, und dann erst die Linie DE gezogen hätte; würde dann auch DE ‡ BC gewesen seyn?

S. Ja; denn wäre DE nicht ‡ BC, so könnte man durch D wie Fig. 66 mit BC eine Linie parallel ziehen, welche nicht durch E, sondern durch F oder G gienge. Nun sollte seyn

$AB : AD = AC : AE.$

Wäre nun nicht DE, sondern DF ‡ BC, so wäre

$AB : AD = AC : AF$ und
$AF < AE$; und es müßten dann zwey ungleiche Linien AE und AF aus einer und derselben Linie AC durch einerley Wiederholung entstehen, welches nicht angeht. Eben so zeigt man, daß auch DG nicht ‡ BC seyn kann. Denn alsdann wäre

$AB : AD = AC : AG$ und es soll
$AB : AD = AC : AE$ seyn. Hiernach müßte

$AG = AE$, und es soll nach der Annahme

$AG > AE$ seyn, welches beydes wider einander streitet.

L. Wenn also vier gerade Linien proportional sind, und man legt dieselben so auf zwey unter einem beliebigen Winkel mit einander

verbundene gerade Linien, daß die erste und zweyte, auf der einen und die dritte und vierte auf der andern zu liegen kommen; so sind die geraden Linien, wovon die eine die Endpunkte der ersten und dritten und die andere die Endpunkte der zweyten und vierten verbindet, einander parallel. Was wir also Fig. 59 von den Proportionallinien AD, DB, AE, EC behaupten können, das läßt sich auch von allen Proportionallinien behaupten, denn jede vier Proportionallinien lassen sich wie AD, DB, AE und EC gelegt und dann DE und BC einander parallel gedenken. Wenn nun

AD : DB = AE : EC; so ist auch
AE : EC = AD : DB, und
DB : AD = EC : AE und
EC : AE = DB : AD. Diese Veränderungen einer Proportion haben wir schon vorher kennen gelernt, und sie bestehen in Versetzungen der Glieder. Die Ordnung wird dabey entweder ganz umgekehrt, wie wenn aus

AD : DB = AE : EC
EC : AE = DB : AD gemacht wird; oder die zweyte Hälfte wird zur ersten und die erste zur zweyten gemacht, wie bey der Verwandlung der Proportion

AD : DB = AE : EC in diese
AE : EC = AD : DB; oder es werden das erste und dritte Glied mit dem zweyten und vierten verwechselt, wie bey der Verwandlung der Proportion

AD : DB = AE : EC in diese
DB : AD = EC : AE. Ausser diesen Veränderungen haben wir uns zuvörderst die zu merken, welche in der Verwechselung der beyden mitlern Glieder besteht, wie z. B. wenn aus

AD : DB = AE : EC
AD : AE = DB : EC gemacht würde.

Auch diese Veränderung hebt die Proportionalität nicht auf. Denn wenn AD : DB = AE : EC und man DB und EC in eine gleiche Anzahl Theile theilt, so enthält AD oder die eine Gränze von AD eben so vielmal den einen Theil von DB als AE oder die gleichnamige Gränze von AE den einen Theil von EC enthält. Nimmt man nun AD : AE = DB : EC, so enthalten AD und AE eine gleiche Anzahl Theile und DB und EC oder ihre gleichnamigen Gränzen ebenfalls und die Theile der AD und DB sind, so wie auch die Theile der AE und EC einander gleich. So wie also ein Theil der AD aus einem Theile der AE entsteht, eben so entsteht ein Theil der DB aus einem Theile der EC, und folglich auch AD aus AE so wie DB aus EC, weil AD und AE, so wie DB und EC gleich viel Theile enthalten. Also darf man auch in einer Proportion die beyden mittlern Glieder mit einander verwechseln. Gesetzt also, daß a, b, c und d gerade Linien bedeuten und

a : b = c : d

ist; so lassen sich hieraus, was für andere Proportionen herleiten?

S. Wenn

a : b = c : d; so ist auch
d : c = b : a,
c : d = a : b,
b : a = d : c, und
a : c = b : d.

L. Und wenn e : a = f : c?

S. So ist auch

c : f = a : e
f : c = e : a
a : e = c : f, und
e : f = a : c.

L. Wenn

a : b = c : d, so ist auch
a : c = b : d; und wenn
e : a = f : c, so ist auch
e : f = a : c. Es ist also nicht nur

b : d, sondern auch e : f = a : c. Was folgt daraus?

S. Daß auch

b : d = e : f

L. Aus den beyden Proportionen

a : b = c : d
e : a = f : c, läßt sich also die

Proportion

b : e = d : f herleiten, und hieraus folgen durch die vorhin erklärten Veränderungen auch

$e : b = f : d$

$b : d = e : f$ u. s. w. Wenn dies vorausgesetzt werden kann; so kann man auch, wenn Fig. 64 bewiesen worden, daß

$BC : AC = CH : GH$ und

$BA : BC = CG : CH$,

ohne AK ╪ BH zu ziehen, aus diesen beyden Proportionen sogleich die herleiten

$AC : BA = GH : CG$: oder wenn die 64 und 61ste Figur in Verbindung betrachtet werden, so folgt aus

$BC : AC = EF : DF$

$BA : BC = ED : EF$, sogleich

$AC : BA = DF : ED$.

Auf diese Art hilft das jetzige zur Verkürzung des bey Fig. 63 und 64 durchgenommenen Satzes; allein es soll uns nun auch noch dazu dienen, daß wir, wenn zwey Dreyecke gleichwinklig sind, und also je zwey Seiten des einen mit zwey Seiten des andern in Proportion stehen, auf eine allgemeine und leichte Art die Ordnung bestimmen lernen, in welcher diese Linien proportional sind. Wenn Fig. 61 in den beyden Dreyecken ABC und DEF

$B = E$

$C = F$ und

$A = D$; so ist

$BA : BC = ED : EF$

$BC : CA = EF : FD$ und

$BA : CA = ED : DF$. Verwechseln

Sie nun in diesen Proportionen die mittlern Glieder, so erhalten Sie?

S. Diese

BA : ED = BC : EF
BC : EF = CA : FD und
BA : ED = CA : DF.

L. Wie unterscheiden sich nun diese Proportionen von den vorhergehenden in Rücksicht auf die Ordnung der darin vorkommenden Linien?

S. In den Proportionen

BA : BC = ED : EF
BC : CA = EF : FD und
BA : CA = ED : DF sind die beyden ersten Glieder Seiten des einen und die beyden lezten Seiten des andern Dreyecks; in den andern aber

BA : ED = : BC : EF
BC : EF = : CA : FD und
BA : ED = : CA : DF sind das erste und dritte Glied Seiten des einen und das zweyte und vierte Seiten des andern Dreyecks.

L. In einer jeden Proportion nennt man das erste und dritte Glied, so wie auch das zweyte und vierte gleichnamige Glieder; und Seiten aus zwey Dreyecken, die gleichen Winkeln gegenüber stehen, nennt man gleichliegende Seiten. Welche Glieder sind also in diesen Proportionen

BA : BC = ED : EF
BC : CA = EF : FD und
BA : CA = ED : DF gleichliegende Seiten?

S. Die gleichnamigen, denn es steht z. B.
BA dem Winkel C
ED — — F gegenüber und es ist
C = F. Eben so ist
BC gleichliegend der EF, weil
A = D und
CA gleichliegend der DF, weil
B = E.

L. Wir können uns also die Regel machen, daß in zwey gleichwinkligen Dreyecken je zwey Seiten des einen je zwey Seiten des andern proportional sind, wenn man dieselben so nimmt, daß die gleichnamigen Seiten auch gleichliegende werden; und diese Regel wird uns oft gute Dienste leisten. — Wie sind nun aber die Seiten in den andern Proportionen geordnet?

S. In diesen beyden Proportionen sind immer die beyden ersten und die beyden lezten Glieder gleichliegende Seiten.

L. Was fließt daraus für eine Regel?

S. Daß in zwey gleichwinkligen Dreyecken je zwey Seiten des einen je zwey Seiten des andern proportional sind, wenn die Seiten so genommen werden, daß die beyden ersten und

die beyden lezten Glieder der Proportion gleichliegende Glieder sind.

L. Damit Ihnen die Nützlichkeit dieser Regeln sogleich bekannt und also die Regeln selbst wichtig werden; so betrachten Sie die 67ste Figur. Das Dreyeck ABC ist rechtwinklig und zwar ist BAC = R. Aus der Spitze des R aus A ist AD senkrecht auf die Hypothenuse gefällt, und dadurch sind noch zwey Dreyecke ABD und ADC entstanden. Was können Sie von den beyden Dreyecken ABC und ABD behaupten?

S. Daß sie gleichwinklig sind. Dann es ist

BAC = ADB = R und
B = B, also auch
BCA = BAD.

L. Und was von den Dreyecken BAC und ADC?

S. Ebenfalls daß sie gleichwinklig sind. Denn es ist

BAC = ADC = R und
C = C und also auch
DBA = DAC.

L. Was endlich von den Dreyecken ADB und ADC?

S. Gleichfalls, daß sie gleichwinklig sind. Denn es ist

BDA = ADC = R
DBA = DAC und
BCA = BAD.

L. Also stehen nun auch die Seiten je zweyer dieser Dreyecke in Proportion. Wir wollen zuvörderst die beyden Dreyecke ADB und ADC nehmen. Ergänzen Sie nach den vorher bemerkten Regeln diese Proportion.

BD : DA

S. Dann entsteht diese

BD : DA = DA : DC.

L. Ist diese Ordnung die richtige?

S. Ja; denn BD und DA sind eben sowohl als DA und DC gleichliegende Seiten.

L. Ergänzen Sie nun auch diese Proportion

BD : BA

aber so, daß Sie die beyden Dreyecke BDA und ABC dazu gebrauchen.

S. Dann ist

BD : BA = BA : BC.

L. Und nun auch diese Proportion

DC : AC

auf die Art ergänzt, daß die beyden Dreyecke DAC und BAC dazu gebraucht werden.

S. Dann ist

DC : AC = AC : BC.

L. Finden Sie in den Proportionen

BD : DA = DA : DC

BD : BA = BA : BC und

DC : AC = AC : BC nicht etwas, wodurch sich diese von den sonst betrachteten unterscheiden?

S. Ja, die beyden mittlern Glieder sind gleich.

L. In einem solchen Falle nennt man ein jedes dieser Glieder das mittlere Proportionalglied zwischen den beyden äussern; und man kann also hier sagen, daß

AD die mittlere Proportionallinie zwischen BD und DC
BA — — BD und BC und
AC = = DC und BC sey.

Sollten Sie dies wohl im Stande seyn, bloß durch Worte und ohne Figur auszudrucken?

S. Wenn in einem rechtwinkligen Dreyecke aus der Spitze des rechten Winkels eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse gefällt wird, so ist

1. diese senkrechte Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den dadurch entstandenen Stücken der Hypothenuse und

2. jede Cathete die mittlere Proportionallinie zwischen dem angrenzenden Stücke der Hypothenuse und der ganzen Hypothenuse.

L. Wenn Fig. 68 ABDC ein halber Kreis und also BC ein Durchmesser ist; was ist dann BAC für ein Winkel?

S. Ein rechter.

L. Und wenn also ADB = R ist, was folgt dann?

S. Daß

$$BD : DA = DA : DC.$$

L. Also ist eine aus einem Punkte der Peripherie eines Kreises auf den Durchmesser senkrecht gezogene Linie ebenfalls die mittlere

Pro-

Proportionallinie zwischen den dadurch entstandenen Stücken des Halbmessers. So weit für diesmal. In unserer nächsten Unterredung wollen wir uns mit fernern Anwendungen des erlernten beschäftigen.

Fünf und zwanzigstes Gespräch.

L. Wie findet man zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie? Da Fig. 59 $AD : DB = AE : EC$, und $AD : AE = DB : EC$, und $AD : AE = AB : AC$ und endlich $AD : AB = AE : AC$ ist, so bald $DE \# BC$ gezogen worden; so kann Ihnen die Betrachtung dieser Figur nicht nur die Beantwortung dieser Frage, sondern sie muß Ihnen sogar mehrere Antworten auf dieselbe an die Hand geben.

S. Man kann diese Frage auf eine doppelte Art beantworten. Erstlich so: Man zieht aus Einem Punkte zwey gerade unbegrenzte Linien unter einem beliebigen Winkel, und legt auf die eine derselben nach einander entweder die erste und zweyte oder die erste und dritte, und auf die andere in jenem Falle die dritte und in diesem die zweyte der gegebenen Linien, verbindet darauf die erste und dritte oder die erste und zweyte in ihren Endpunkten durch eine gerade Linie und zieht mit dieser aus dem Endpunkte der übrigen Linie eine Paral-

lele.

lele. Oder man kann auch zweytens die gegebenen Linien in der beschriebenen Ordnung alle aus dem Punkte, aus welchem die beyden unbegrenzten Linien gezogen sind, auf dieselben legen, und übrigens denselben Weg gehen. Denn Fig. 59 ist

$$AD : DB = AE : EC$$
$$AD : AE = DB : EC.$$

Wären also AD, DB und AE die gegebenen Linien, so fände man EC auf dem zuerst beschriebenen Wege. Ferner ist

$AD : AB = AE : AC$ und

$AD : AE = AB : AC$; und wären daher AD, AB, AE die gegebenen Linien, so würde auf die zweyte Art AC gefunden.

L. Würde das Verfahren wohl anders eingerichtet zu werden brauchen, wenn die zweyte und dritte Linie einander gleich wären?

S. Nein.

L. Also könnte man auf diese Art auch zu zwey gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie finden; denn das heißt im Grunde nichts anders als zu drey gegebenen geraden Linien, davon die zweyte und dritte gleich sind, die vierte Proportionallinie finden. Wie findet man nun aber zwischen zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie? Die 68ste Figur kann Ihnen die Antwort hierauf an die Hand geben.

S. Man legt die beyden gegebenen Linien in eine gerade Linie an einander, theilt ihre Sum-

Summe in zwey gleiche Theile, beschreibt mit der Hälfte einen halben Kreis, und errichtet aus dem Zusammensetzungspunkte eine senkrechte Linie. Denn wenn Fig. 68 AD und DC die gegebenen Linien sind, BK = KC und BACDB ein halber Kreis und BDA = R ist; so ist BD : DA = DA : DC.

L. Wie kann man ferner beurtheilen, ob vier gerade Linien proportional sind?

S. Man muß sie zu Seiten von Dreyecken machen, und untersuchen, ob die Dreyecke gleichwinklig sind.

L. So beurtheilen Sie einmal, ob Fig. 69, wo in einem Kreise die beyden Sehnen AB und DC in E sich schneiden AE : EC = DE : EB sey?

S. Dann ziehe ich die Linien AC und DB Fig. 70. Nun sind die Dreyecke AEC und DEB gleichwinklig, indem

AEC = DEB als Vertikalwinkel
A = D und
C = B, weil A und D Winkel an der Peripherie sind, deren Schenkel auf dem Bogen BC ruhen, und eben so sind C und B Winkel an der Peripherie, deren Schenkel auf dem Bogen DA ruhen. Da nun AE und DE, so wie auch EC und EB gleichliegende Seiten sind, so ist auch AE : EC = DE : EB.

L. Ist Fig. 71 auch die Proportion AD : AE = AC : AB richtig?

S.

S. Ja. Denn Fig. 72 ist in den Dreyecken ADE und ABC

$A = A$ und

$ADE = C$ so wie

$AED = B$. Denn da DECB ein Viereck ist, dessen Winkelspitzen in dem Umfange eines Kreises liegen, so ist

$EDB + C = 2\,R$ und

$DEC + B = 2\,R$, und also

$C = 2\,R - EDB$ und

$B = 2\,R - DEC$. Es ist aber auch

$ADE = 2\,R - EDB$ und

$AED = 2\,R - DEC$ und daher

$ADE = C$ und

$AED = B$. Ferner ist

$AD : AE = AC : AB$, weil AD und AC, so wie auch AE und AB gleichliegende Seiten sind.

L. Sind, wenn Fig. 73 AB eine Tangente des Kreises ist, die Dreyecke ABC und ABD nicht auch gleichwinklig?

S. Ja. Denn es ist

$A = A$ und

$ABC = D$, denn ABC ist ein Winkel, welchen eine Tangente AB mit einer Secante BC macht, und dieser ist dem Winkel in dem gegenüber liegenden Abschnitte D gleich; und wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke gleichwinklig.

L.

L. Ist daher diese Proportion richtig?

AC : AB = AB : AD

S. Ja; denn AC und AB sind so wie auch AB und AD gleichliegende Seiten.

L. Wie leicht die Beurtheilung der Proportionalität dieser Linien ist! Und aus den angeführten Proportionen lassen sich vermittelst einiger andern Sätze, die wir uns nun auch bekannt machen wollen, auf eine eben so leichte Art verschiedene Sätze ableiten, die zwar auch auf andern Wegen, aber mit viel größerer Mühe eingesehen werden können. — Betrachten Sie die 74ste Figur. Es ist darin DE ∦ BC, und also AD : DB = AE : EC u. s. w. Doch darauf sehen wir jetzt nicht. Wichtiger ist für uns jetzt die Frage: Wie sind die beyden Dreyecke DBE und DEC beschaffen?

S. Einander gleich, weil DE = DE und DE ∦ BC ist, beyde also einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallelen liegen.

L. Gesetzt nun, daß AD in fünf gleiche Theile getheilt, und aus den Theilungspunkten nach E gerade Linien gezogen würden; was geschähe dadurch mit dem Dreyecke ADE?

S. Es würde dasselbe in eben so viel Dreyecke getheilt, die alle einander gleich wären, indem sie insgesammt gleiche Grundlinien hätten, und zwischen einerley Parallelen lägen.

L. Und wenn man AD in eine andere Anzahl gleicher Theile theilte, und übrigens auf eben die Art verführe?

S. So würde auch das Dreyeck ADE jedesmal in eben so viele und unter einander gleiche Dreyecke getheilt.

L. Wenn man nun AD in solche gleiche Theile theilte, daß man DB durch die Wiederholung eines dieser Theile entweder genau, oder doch ohne einen Fehler auf den man zu sehen hätte, hervorbringen könnte; und DB aus eben den Theilen zusammensetzte, aus welchen AD bestünde, und aus den Zusammensetzungspunkten nach E gerade Linien zöge; was fände dann statt?

S. Dann würde das Dreyeck DEB in eben so viele gleiche Dreyecke getheilt, als DB Theile faßte, und die Theile des Dreyecks DEB wären den Theilen des Dreyecks ADE so wie auch die Theile der Linie DB den Theilen der Linie AD gleich.

L. Und wäre also nicht

$$\triangle ADE : \triangle DEB = AD : DB?$$

S. Ja. Denn das $\triangle$ ADE und die Linie AD wären in eine gleiche Anzahl von Theilen getheilt, und das $\triangle$ DEB enthielte einen Theil des Dreyecks ADE eben so vielmal als die Linie DE einen Theil der Linie AD enthielte.

L. Wie verhalten sich also zwey Dreyecke, die zwischen einerley Parallelen liegen?

S.

S. Wie ihre Grundlinien.

L. Wie verhalten sich also die Dreyecke AED und DEC?

S. $\triangle$ AED : $\triangle$ DEC = AE : EC.

L. Vorher sahen wir, daß

$\triangle$ ADE : $\triangle$ DEB = AD : DB, und jetzt, daß

$\triangle$ ADE : $\triangle$ DEC = AE : EC. Was folgt hieraus, da auch $\triangle$ DEB = $\triangle$ DEC?

S. Daß AD : DB = AE : EC.

L. Hier gerathen wir auf einen schon längst uns bekannten Satz, den wir also auch auf die Art uns hätten bekannt machen können, wie er so eben sich uns dargeboten hat. Wenn nun zwey Dreyecke, die zwischen einerley Parallele liegen, sich wie ihre Grundlinien verhalten; wie werden sich zwey Parallelogramme verhalten, die zwischen einerley Parallelen gelegt werden können?

S. Ebenfalls wie ihre Grundlinien; denn da die Parallelogramme nur noch einmal so groß sind als Dreyecke, welche zwischen eben denselben Parallelen liegen und einerley Grundlinie mit ihnen haben, so müssen sie sich wie dergleichen Dreyecke und also wie ihre Grundlinien verhalten.

L. Das wollen wir uns also merken, daß sowohl Dreyecke als Parallelogramme, welche zwischen einerley Parallelen liegen, sich wie ihre Grundlinien verhalten. Wie verhalten

sich also Fig. 75, wo HF ‡ AE ‡ DC und HD ‡ GC ‡ FE, und ABCD, GBCF und HABG Rechtecke sind, die beyden Rechtecke ADCB und HABG gegen einander.

S. ADCB : HABG = BC : GB.

L. Und wie die Rechtecke BEFG und HABG?

S. BEFG : HABG = BE : AB.

L. Und wenn nun ADCB = BEFG wäre und also ADCB : HABG = BEFG : HABG?

S. So wäre auch BC : GB = BE : AB.

L. Und es stünden also die beyden Seiten des einen mit den beyden Seiten des andern auf die Art in Proportion, daß die beyden Seiten des einen die äussern und die beyden Seiten des andern die mittlern Glieder wären. — Was fände aber statt, wenn BC : GB = BE : AB?

S. Dann verhielte sich durch ADCB : HABG = BEFG : HABG und es wäre ADCB = HABG.

L. Da ADCB = BCxAB und BEFG = GBxBE, so wäre also hier das Rechteck zwischen zweyen äussern Proportionallinien dem Rechtecke zwischen den beyden mittlern gleich. Nun fällt leicht in die Augen, daß man jede zwey gleiche Rechtecke so legen könne als Fig. 75 die beyden Rechtecke ADCB und BEFG liegen, worauf die Verbindung beyder durch ein drittes wie HABG sehr leicht ist; und man kann also die vorhin gemachten Schlüsse

auf

auf jede zwey gleiche Rechtecke anwenden. Was ist man daher auch im Stande von den Seiten jeder zwey gleichen Rechtecke zu behaupten?

S. Daß diese Seiten in der Ordnung unter einander proportional sind, wenn die beyden Seiten des einen Rechtecks die äussern und die beyden Seiten des andern die mittlern Glieder sind.

L. So oft ferner vier gerade und proportionale Linien gegeben sind, so kann man das Rechteck zwischen den beyden äussern und das Rechteck zwischen den beyden mittlern Linien machen, dieselben so legen, wie Fig. 75 ADCB und BEFG liegen, sie durch ein drittes wie AHBG verbinden und dann auch auf eine ähnliche Art schließen als vorhin. Was läßt sich hiernach von jeden vier geraden und proportionalen Linien behaupten?

S. Daß das Rechteck zwischen den beyden äussern dem Rechtecke zwischen den beyden mittlern Proportionallinien gleich ist.

L. Wie wären, wenn von den beyden gegebenen gleichen Rechtecken das eine ein Quadrat wäre, und seine Seiten in der dann zu behauptenden Proportion zu den mittlern Gliedern genommen würden, diese mittlern Glieder beschaffen?

S. Gleich.

L. Und die Seite des Quadrats wäre also?

S. Die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seiten des Rechtecks.

L. Und wenn unter den vier gegebenen Proportionallinien die zweyte und dritte gleich sind; was wird alsdann das Rechteck zwischen beyden?

S. Das Quadrat der mittlern Proportionallinie.

L. Was läßt sich also in diesem Falle behaupten?

S. Daß das Rechteck zwischen den beyden äussern Linien gleich ist dem Quadrate der mittlern.

L. Fig. 69 ist AE:EC=DE:EB. Was läßt sich daher nach den gegenwärtigen Sätzen weiter behaupten?

S. Daß AE x EB = EC x DE.

L. Ein Satz, den wir schon damals gehabt haben, als wir uns mit der Vergleichung der Rechtecke unter einander beschäftigten. Wenn in einem Kreise zwey Sehnen sich schneiden, so sind die Rechtecke zwischen den Stücken der Sehnen einander gleich. Aber wie viel leichter ist nicht hier der Beweis. Fig. 73 ist ferner AC : BA = BA : AD. Was folgt daraus?

S. Daß AC x AD = BAq. Auch diesen Satz haben wir schon gehabt, aber auf die jetzige Art ist er viel leichter bewiesen.

L. Fig. 67 und 68 verhält sich

$BD : BA = BA : BC$ und

$DC : AC = AC : BC$. Was folgt hieraus?

S. Daß sowohl

$BD \times BC = BAq$, als auch

$DC \times BC = ACq$.

L. Addiren Sie hier gleiches zu gleichen.

S. Dann ist

$BD \times BC + DC \times BC = BAq + ACq$.

L. Und wie groß sind die beyden Rechtecke? $BD \times BC$ und $DC \times BC$ zusammen genommen, da sie Rechtecke zwischen der Linie BC und ihren beyden Theilen BD und DC sind.

S. So groß als BCq.

L. Und was folgt nunmehr?

S. Daß $BCq = ABq + ACq$.

L. Hier haben Sie einen neuen Beweis für den pythagorischen Lehrsatz, der Ihnen gewiß auch leichter scheinen wird, als der sonst gebrauchte. Ueberhaupt werden Sie durch die gegenwärtigen Anwendungen schon hinlänglich von der Wichtigkeit der Lehre von den Proportionallinien überzeugt seyn; ob Sie gleich in unserer nächsten Unterredung es noch mehr werden werden.

Sechs und zwanzigstes Gespräch.

L. Wenn in einem Dreyecke aus der Spitze eines Winkels auf die gegenüber stehende Seite eine senkrechte Linie gefällt wird; so nennt man diese senkrechte Linie die Höhe und die gedachte Seite die Grundlinie des Dreyecks. So ist z. B. AD Fig. 67 die Höhe und BC die Grundlinie des Dreyecks. Ein jedes Dreyeck ist also einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite die Höhe und die andere die halbe Grundlinie dieses Dreyecks ist. Gedenken Sie sich ein solches Rechteck und dazu ein ihm gleiches Quadrat, und sagen Sie mir, wie die Seite dieses Quadrats beschaffen sey?

S. Sie ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und der halben Grundlinie des Dreyecks.

L. Was hat man also, wenn man ein Dreyeck in ein Quadrat verwandeln will, zu thun, um die Seite dieses Quadrats zu finden?

S. Die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe des Dreyecks und der halben Grundlinie desselben zu suchen.

L. So haben wir also jetzt nicht mehr wie sonst nöthig, das Dreyeck erst in ein Rechteck und dieses darauf in ein Quadrat zu verwandeln, und es leistet auch in diesem Stücke das bisherige von den Proportionallinien einen

Vor-

Vortheil. Was hat man ferner zu thun, um die Seite des Quadrats zu finden, worin man ein Rechteck verwandeln kann?

S. Die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seiten des Rechtecks zu suchen; denn das Quadrat einer mittleren Proportionallinie ist dem Rechtecke zwischen den beyden äussern gleich.

L. Wenn man in einem schiefwinkligen Parallelogramme aus der Spitze eines Winkels eine senkrechte Linie auf die gegenüber stehende Seite fällt; so heißt diese senkrechte Linie die Höhe und die gedachte Seite die Grundlinie des Parallelogramms; und bey der Vergleichung der Parallelogramme unter einander haben wir die Sätze gehabt, aus welchen nunmehr fließt, daß jedes Parallelogramm einem Rechtecke gleich sey, dessen eine Seite seiner Grundlinie und die andere seiner Höhe gleich ist. Wie findet man also die Seite eines Quadrats, welches einem gegebenen schiefwinkligen Parallelogramme gleich ist?

S. Man sucht die mittlere Proportionallinie zwischen seiner Grundlinie und Höhe.

L. Wie findet man ferner die Seite eines Quadrats, welches einem gegebenen regulären Vielecke gleich ist?

S. Indem man die mittlere Proportionallinie zwischen dem halben Umfange der regulären Figur und dem Radius des in sie beschriebenen Kreises sucht.

L. Und wie würde man, wenn man eine gerade Linie hätte, die so groß wäre als die Peripherie eines Kreises, die Seite eines diesem Kreise gleichen Quadrats finden?

S. Wenn man die mittlere Proportionallinie zwischen der halben gedachten geraden Linie oder der Hälfte der Peripherie des Kreises und seinem Radius suchte.

L. Wie groß ist also ein jedes Dreyeck?

S. So groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der halben Grundlinie und der Höhe des Dreyecks ist.

L. Wie groß ferner ein Rechteck?

S. So groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seiten des Rechtecks ist.

L. Bey der Vergleichung der Rechtecke unter einander habe ich bereits dieser Bestimmung schon einmal gedacht. Jetzt verstehen Sie aber dieselbe erst, und werden nun auch leicht von selbst einsehen, wie viel nöthig war, um sie verstehen zu können. — Wie groß ist ein jedes Parallelogramm?

S. So groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und der Höhe des Parallelogramms ist.

L. Wie groß ist ein jedes reguläre Vieleck?

S. So groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen dem hal-

halben Umfange des Vielecks und dem Radius des Kreises ist, der in dasselbe beschrieben werden kann.

L. Wie groß ist ein jeder Kreis?

S. So groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der halben Peripherie und dem Radius des Kreises ist.

L. Wie leicht alle diese Bestimmungen sind, und wie wichtig daher die Lehre von den Proportionallinien ist. Und doch haben Sie bey weitem die Proportionallinien noch nicht auf alle die Arten betrachtet und kennen gelernt, als solches möglich ist. Das mehreste bleibt Ihnen noch bey der eigentlichen Betrachtung der Aehnlichkeit der Figuren, davon Sie nunmehr die nöthigen Vorerkenntnisse haben, vorbehalten. Jezt will ich noch einige Worte über ein Verfahren sagen, dessen man sich bedienen kann, die Höhe eines Thurms zu bestimmen, ohne denselben selbst zu messen. Als wir anfiengen uns über mathematische Gegenstände zu unterreden, schien Ihnen das unmöglich, und ich war damals noch nicht im Stande, Ihnen zu zeigen, wie man es machen könne. Nunmehr sind Sie so weit gekommen, daß ich auch darüber mit Nutzen mit Ihnen sprechen kann, wenn ich auch gleich nicht alle hier möglichen Wege Ihnen schon bekannt machen kann, ja selbst die besten noch

unbe-

unberührt lassen muß. Zuvörderst aber muß ich Ihnen zeigen, wie man auf dem Erdboden eine gerade Linie und einen geradlinigen Winkel mißt, und dieselben auf dem Papiere verzeichnet. (Es werden hier dem Schüler eine Meßkette und ein Winkelmesser gezeigt, ihre Beschaffenheit und ihr Gebrauch beschrieben und gewiesen, und einige damit gemessene gerade Linien und geradlinige Winkel vermittelst eines verjüngten Maasstabes und Transporteurs, deren Beschaffenheit bey dieser Gelegenheit ebenfalls erklärt wird, auf Papier getragen. Da dies geschehen, so werden ihm Verticallinien sinnlich gemacht, und die Eigenschaften derselben entwickelt, darauf die Horizontallinien erklärt und gezeigt, wie man vermittelst einer Setzwaage erforschen könne, ob eine gerade Linie horizontal sey? Bloße Beschreibungen sind nicht hinlänglich, um von allen diesen Dingen einen solchen Begriff hervorzubringen, daß das folgende gehörig verstanden werden könne. Ehe daher dieses folgende mit einem Lehrlinge durchgenommen werden kann, müssen die genannten Werkzeuge ihm in Natura gezeigt, und alles angeführte wirklich mit ihm vorgenommen worden seyn.) Nun stelle Fig. 76 AB die Höhe eines Thurms vor und CD sey eine Horizontallinie, welche verlängert die Höhe des Thurms in B treffe. ADC und ACD seyen ferner die Winkel, welche zwischen dieser Horizon-

rizon-

rizontallinie und zwischen den aus ihren Endpunkten nach der Spitze des Thurms A gedenkbaren Linien liegen. Wenn man bey einem zu messenden Thurme eine Horizontallinie gemessen und dieselbe nach dem verjüngten Maasstabe in CD auf das Papier getragen hat, ferner daran die beyden gemessenen Winkel ADC und ACD legt, und die Schenkel dieser Winkel verlängert, bis sie sich in A schneiden, endlich CD verlängert, und aus A darauf eine senkrechte Linie zieht; so enthält die Linie AB die Linie CD eben so vielmal als die Höhe des zu messenden Thurms von B an die gemessene Horizontallinie enthält. (Auch dieses Verfahren wird dem Schüler in einem wirklichen Falle gezeigt.) Scheint es Ihnen nun noch unmöglich die Höhe eines Thurms zu bestimmen, ohne denselben wirklich zu messen?

S. Nein, nun kann ich es wohl begreifen. Aber warum enthält denn die Linie AB die Linie CD eben so vielmal als die Höhe des Thurms die gemessene Horizontallinie enthält? Dies sehe ich noch nicht recht ein.

L. Bey einem Thurme, wo man die beschriebene Horizontallinie messen kann, ist man im Stande, eine Figur wie 76 sich im Grossen zu gedenken, der die 76ste Figur ähnlich ist, und wo der einzige statt findende Unterschied bloß in der Größe liegt. Hierauf gründet

det sich jene Behauptung. Ganz deutlich wird dies Ihnen freylich noch nicht seyn; indeß so wie Sie in der Folge noch bessere Verfahrungsarten kennen lernen werden, so wird auch alle Dunkelheit, welche sich noch findet, immer mehr und mehr verschwinden. Wenn alles gründlich erklärt werden soll; so reicht das bisherige noch nicht zur Anwendung der geometrischen Lehren auf wirkliche Fälle im Leben hin; aber hinreichend ist es, um die Möglichkeit dieser Anwendung zu begreifen; und Sie können daher das heute erlernte gebrauchen, theils von dem künftigen, wo öftere und deutlichere Anwendungen vorkommen werden, ein Vergnügen mehr zu hoffen, theils von der Nothwendigkeit noch fernerer Vermehrung der bereits erworbenen Kenntnisse sich zu überzeugen.

Verzeichniß
der
in diesen Versuchen vorkommenden Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, Aufgaben und Lehrsätze.

Anmerkungen.

Die römischen Zahlen zeigen die Stücke dieser Versuche an:

I bedeutet den Versuch u. s. w.

II - - die Fortsetzung des Versuchs u. s. w.

III - - der vollständigern Fortsetzung u. s. w. ersten Band.

IV - - den gegenwärtigen zweyten Band.

Die teutschen Zifern zeigen die Seiten an.

Erklärungen

1. der Linie I. 8-10.
2. der geraden Linie I. 11-14.
3. der krummen Linie I. 15. 16.
4. der einfachen und zusammengesetzten Linien. I. 16. 17.
5. der Fläche. I. 19-21.
6. der Ebene. I. 21. 22.
7. der krummen Fläche. I. 23.
8. des Winkels. I. 24-27.

9. der

9. der Schenkel und der Spitze eines Winkels. I. 28.
10. der geradlinigen, krummlinigen und vermischtlinigen Winkel. I. 29. 30.
11. der ebenen und unebenen Winkel. I. 30. 31.
12. der Nebenwinkel. I. 31 - 33.
13. des rechten, des spitzen, des stumpfen Winkels. I. 33. 34.
14. der senkrechten und schiefen Linie. I. 35.
15. der Figur überhaupt. I. 39 - 41.
16. der Flächenfigur. I. 41. 42.
17. der ebenen Figur. I. 42.
18. der ebenen und geradlinigen Figur. I. 42. 43.
19. der Seite. I. 43.
20. des Dreyecks. I. 44.
21. des Vierecks, Fünfecks u. s. w. I. 44.
22. des ungleichseitigen, des gleichseitigen und des gleichschenkligen Dreyecks, und dabey der Schenkel und der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks. I. 44. 45.
23. des rechtwinkligen, stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreyecks. I. 48.
24. des Kreises. I. 48. 49. III. 86. 87.
25. des Halbmessers. I. 49.
26. der Wechselwinkel bey zwey geraden Linien, die von einer dritten geschnitten werden. II. 97. 98.

27. der äussern und innern gegenüber stehenden Winkel bey dergleichen Linien. II. 98.
28. der innern an einer Seite liegenden Winkel dabey. II. 98.
29. der Parallellinien. II. 98. 99.
30. des Parallelogramms. II. 113 : 115.
31. der gleichseitigen und ungleichseitigen rechtwinkligen und schiefwinkligen Parallelogramme. II. 115 : 117.
32. des Quadrats. II. 117. 118.
33. des Rechtecks. II. 117. 118.
34. des Rhombus. II. 117. 118.
35. des Rhomboides. II. 117. 118.
36. des Durchmessers eines Kreises. III. 87. 88.
37. der Sehne. III. 88.
38. des Bogens. III. 88.
39. der Tangente eines Kreises. III. 89.
40. des Winkels am Mittelpunkte. III. 89. 90.
41. des Winkels am Umkreise. III. 90. oder im Abschnitte. III. 171.
42. des halben Kreises. III. 91.
43. des Abschnitts. III. 91.
44. des Ausschnitts. III. 91.
45. des Sinus eines Bogens oder Winkels. III. 125 : 129.
46. des Cosinus eines Bogens oder Winkels. III. 129 : 132.

47. der Tangente eines Bogens oder Winkels. III. 139 = 142.
48. der Secante eines Bogens oder Winkels. III. 142. f.
49. der Cotangente und Cosecante eines Winkels. III. 143. f.
50. der ähnlichen Abschnitte. III. 174.
51. der in oder um einen Kreis beschriebenen geradlinigen Figuren. IV. 5. 6.
52. des in oder um eine geradlinige Figur beschriebenen Kreises. IV. 6. 7.
53. der in oder um eine andere beschriebene geradlinige Figur. IV. 7. 8.
54. der in einen Kreis gelegten geraden Linie. IV. 8.
55. der regulären Vielecke. IV. 47.
56. der Proportionallinien. IV. 91.
57. der commensurabeln Linie. IV. 99.
58. der incommensurabeln Linie. IV. 104.
59. der mittlern Proportionallinie. IV. 124.

Grundsätze und Forderungen.

1. Forderungen.

1. Zwischen jeden zwey gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen. I. 56. 68.

2. Jede gegebene gerade Linie nach Gefallen zu verlängern. I. 56. 68.

3. Aus jedem gegebenen Punkte mit jedem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben. I. 56. 57. 68.

2. Grundsätze.

1. Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich. I. 63. 68.

2. Wenn zu gleichen Größen gleiche Größen gesetzt werden, so sind die dadurch hervorgebrachten Größen ebenfalls gleich. I. 63. 64. 69.

3. Wenn man von gleichen Größen gleiche Größen wegnimmt, so sind die übrig gebliebenen Größen ebenfalls gleich. I. 64. 65. 69.

4. Wenn man zu einer von zwey gleichen Größen eine Größe setzt, so ist die dadurch hervorgebrachte Größe größer als die andere. I. 65. 69.

5. Wenn man von einer von zwey gleichen Größen etwas hinwegnimmt, so ist der Rest auch kleiner als die andere Größe. I. 65. 69.

6. Gerade und gleiche Linien decken sich einander. I. 67. 69.

7. Gerade Linien, die sich decken, sind einander gleich. I. 67. 69.

8. Geradlinige und ebene Winkel, die sich gleich sind, decken einander, und sind gleich, wenn sie einander decken. I. 67. 69.

9. Größen, die sich decken, sind einander gleich. I. 66. 70.

Aufgaben und Lehrsätze.

1. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben. I. 60 - 62.

2. Von einer gegebenen geraden Linie ein Stück abzuschneiden, welches einer andern gegebenen geraden Linie gleich ist. I. 57. 58.

3. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel und die beyden Seiten, welche diesen Winkel einschließen, gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke so einander gleich, daß sie sich decken, und es sind darin alle Seiten, die gleichen Winkeln, und alle Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. I. 71:76.

4. In einem jeden gleichschenkligen Dreyecke sind die Winkel über der Grundlinie, und wenn man die Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich. I. 77 f. 88:96.

5. In einem jeden Dreyecke, in welchem zwey Winkel einander gleich sind, sind auch die diesen Winkeln gegenüberstehende Seiten einander gleich; oder ein jedes Dreyeck, in welchem zwey Winkel einander gleich sind, ist ein gleichschenkliges Dreyeck. I. 101 f.

6. Wenn in zwey Dreyecken alle Seiten des einen allen Seiten des andern stückweise genommen gleich sind; so sind die ganzen Dreyecke so einander gleich, daß sie sich decken, und es sind auch darin alle Winkel die gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. I. 108 f.

7. Einen gegebenen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen. II. 4 f. 21 f.

8.

8. Eine gegebene gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen. II. 4 f. 31 f.

9. Auf einer gegebenen geraden Linie aus einem Punkte derselben eine senkrechte Linie aufzurichten. II. 4 f. 33.

10. Aus einem gegebenen Punkte über einer gegebenen geraden Linie eine senkrechte Linie auf dieselbe herabzufällen. II. 4 f. 34.

11. Jede zwey Nebenwinkel sind zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel. II. 23 f.

12. Ein jeder Nebenwinkel ist so groß als zwey rechte Winkel weniger den andern Nebenwinkel. II. 26 f.

13. Die Vertikal oder Scheitelwinkel sind einander gleich. II. 26 f.

14. Wenn zwey Winkel, die zusammen genommen so groß sind als zwey rechte Winkel einen Schenkel und die Spitze gemein haben, und ihre übrige Schenkel nach verschiedenen Seiten der Spitze gelegt sind, so liegen diese beyde übrige Schenkel in Einer geraden Linie. II. 28 f.

15. In einem jeden Dreyecke, worin eine Seite verlängert worden, ist der äussere Winkel größer als jeder der innern ihm gegenüber stehenden Winkel. II. 38 f.

16. In einem jeden Dreyecke steht der größern Seite der größere Winkel und der kleinern Seite der kleinere Winkel gegenüber. II. 54.

17. In einem jeden Dreyecke steht dem größern Winkel die größere Seite und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüber. II. 58 f.

18. In einem jeden Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen genommen größer als die dritte. II. 60.

19. Wenn in einem Dreyecke auf einer seiner Seiten in ihren Endpunkten zwey gerade Linien aufgestellet werden, welche innerhalb zusammentreffen; so sind solche kleiner als die beyden übrigen Seiten des Dreyecks, schließen aber einen größern Winkel ein. II. 65 f.

20. Aus jeden drey gegebenen geraden Linien ein Dreyeck zu machen; oder ein Dreyeck zu beschreiben, dessen Seiten drey gegebenen geraden Linien gleich sind. II. 62 f.

21. Jede zwey Dreyecke, worin eine Seite und zwey ähnlich liegende Winkel einander gleich sind, sind einander so gleich, daß sie sich decken, und es sind darin also auch alle Seiten die gleichen Winkeln, und alle Winkel die gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. II. 87 f.

22. Zwey gerade Linien sind parallel, wenn sie, von einer dritten geschnitten, entweder zwey Wechselwinkel, oder einen äussern und den innern gegenüber stehenden Winkel einander gleich, oder zwey innere an einer Seite liegende Win-

Winkel zusammen genommen zweyen rechten Winkeln gleich haben. II. 99 f.

23. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind nicht nur jede zwey Wechselwinkel einander gleich, sondern ein jeder äusserer Winkel ist auch gleich seinem innern gegenüber stehenden Winkel, und jede zwey innere gegenüber stehende Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel. II. 105 f.

24. Wenn eine gerade Linie auf einer von zwey Parallelen senkrecht steht, so ist sie auf der andern ebenfalls senkrecht. II. 109.

25. Wenn eine gerade Linie eine von zwey Parallellinien schneidet, so schneidet sie, verlängert, auch die andere. II. 109.

26. Zwey gerade Linien, die einer und derselben dritten parallel sind, sind auch unter einander parallel. II. 110.

27. In einem jeden Dreyecke, worin eine Seite verlängert worden, ist der äussere Winkel so groß als die beyden innern gegenüber stehenden zusammen genommen. II. 112.

28. In einem jeden Dreyeck sind alle drey Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel. II. 113.

29. Zwey gerade Linien, die zwey gleiche Parallellinien in ihren Endpunkten an einerley Seiten verbinden, sind ebenfalls einander parallel und gleich. II. 114.

30. In einem jeden Parallellogramme sind die einander gegenüber stehende Seiten und die einander gegenüber stehende Winkel gleich. II. 115. 126 f.

31. Wenn in einem Parallelogramme Ein Winkel ein rechter Winkel ist, so sind es alle übrige ebenfalls, oder das Parallelogramm ist ein rechtwinkliges. II. 116.

32. Wenn in einem Parallelogramme Ein Winkel ein schiefer Winkel ist, so sind es alle übrige ebenfalls oder das Parallelogramm ist ein schiefwinkliges. II. 117.

33. Ein jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey gleiche Dreyecke getheilt. II. 127.

34. Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben und zwischen einerley Parallelen liegen, sind einander gleich. II. 128 f.

35. Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen liegen, sind einander gleich. II. 131 f.

36. Dreyecke, die einerley oder gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen liegen, sind einander gleich. II. 133 f.

37. Wenn zwey Dreyecke einerley Grundlinie haben und einander gleich sind, so liegen sie zwischen einerley Parallelen. II. 137 f.

38. Ein Dreyeck, welches mit einem Parallelogramme einerley oder gleiche Grundlinie hat und mit ihm zwischen einerley Parallelen liegt, ist die Hälfte dieses Parallelogramms. II. 140 f.

39. Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm zu verwandeln. II. 141 f.

40. Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches einen bestimmten Winkel enthalte. II. 142.

41. In einem jeden Parallelogramme sind die Ergänzungen der Parallelogramme um der Diagonale einander gleich. 142 f.

42. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eben dieselben Winkel und eine gegebene Seite enthalte. II. 146.

43. Ein Dreyeck in ein Parallelogramm von einem bestimmten Winkel und einer bestimmten Seite zu verwandeln. II. 147.

44. Ein Viereck in ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel enthalte, zu verwandeln. II. 147 f.

45. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben. II. 149.

46. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse so groß als die beyden Quadrate der Catheten zusammen genommen. II. 151 f.

47. Zwey Quadrate in ein einziges zu verwandeln. II. 157.

48. Ein Quadrat zu beschreiben, welches doppelt so groß als ein gegebenes Quadrat sey. II. 158.

49. Wenn eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile getheilt worden, so ist das Rechteck zwischen den beyden un-

gleichen Theilen dem Quadrate der Hälfte dieser Linie weniger dem Quadrate des Stücks so zwischen den Theilungspunkten liegt, gleich. II. 158 f.

50. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. II. 162.

51. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie doppelt so groß als das zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile enthaltene Rechteck. III. 11 f.

52. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie viermal so groß als das Quadrat der Hälfte derselben. III. 15 f.

53. Wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß als die beyden Rechtecke zwischen der ganzen Linie und den beyden Theilen derselben. III. 22 f.

54. Wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß als die beyden Quadrate der Theile nebst dem doppelten Rechtecke, so zwischen diesen Theilen enthalten ist. III. 22 f. 30 f.

55. Zwey Quadrate sind einander gleich, wenn sie über gleichen Seiten beschrieben sind, und umgekehrt. III. 28. 29.

56. Wenn man eine gerade Linie in drey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß als ein Rechteck zwischen

der

der ganzen Linie und dem einen Theile drey-mal genommen. III. 36. 37.

57. Wenn man eine gerade Linie in drey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie neunmal so groß als das Quadrat eines Theils. III. 37.

Aehnliche Sätze für die Fälle, wenn eine gerade Linie in vier oder fünf gleiche Theile getheilt ist, findet man hier ebenfalls.

58. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Stücks so groß als das Quadrat der Hälfte. III. 38. f.

59. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt und dann nach Willkühr verlängert; so ist das Rechteck zwischen der Verlängerung und der ganzen Linie nebst dem Quadrate der Hälfte so groß als das Quadrat der Linie, welche der Hälfte und der Verlängerung zusammen genomen gleich ist. III. 48.

60. Wenn eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile getheilt worden; so ist das doppelte Quadrat der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate des zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Stücks gleich den beyden Quadraten der ungleichen Theile zusammen genommen. III. 50-56.

61. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt und sie darauf verlängert; so

so ist das Quadrat des aus der ganzen Linie und der Verlängerung bestehenden Linie nebst dem Quadrate der Verlängerung dem zwiefachen Quadrate der Hälfte und dem zwiefachen Quadrate der aus der Hälfte und der Verlängerung bestehenden Linie gleich. III. 59 f.

62. Eine gegebene gerade Linie so in zwey Theile zu theilen, daß das Rechteck zwischen dem einen Theile und der ganzen Linie dem Quadrate des andern Theils gleich ist. III. 63 f.

63. In einem stumpfwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, größer als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das zwiefache Rechteck zwischen der einen von den den stumpfen Winkel enschliessenden Seiten und dem ihr in gleicher Richtung bis zu der aus dem Gegenwinkel auf sie herabgefällten Perpendikulären angesetzten Stücke. III. 70 f.

64. In einem spitzwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der einen Seite kleiner als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck zwischen der einen dieser übrigen Seiten und dem Stücke derselben, welches zwischen der andern der beyden übrigen Seiten und der aus der Spitze des der getheilten Seite gegenüber stehenden Winkels gezogenen senkrechten Linie liegt. III. 72 f.

65.

65. Zwey Kreise sind einander gleich, wenn sie gleiche Halbmesser oder Durchmesser haben. III. 92.

66. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden. III. 95 f.

67. Wenn in einem Kreise eine gerade Linie auf einer Sehne, die in zwey gleiche Theile getheilt ist, in dem Theilungspunkte senkrecht steht, so geht dieselbe verlängert durch den Mittelpunkt. III. 100.

68. Wenn in einem Kreise eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt geht, eine andere, die nicht durch den Mittelpunkt geht, in zwey gleiche Theile theilt; so stehen beyde auf einander senkrecht. III. 100.

69. Wenn in einem Kreise zwey gerade Linien, davon die eine durch den Mittelpunkt geht, auf einander senkrecht stehen, so wird die andere von der ersten in zwey gleiche Theile getheilt. III. 100.

70. Zwey Bogen eines Kreises, die zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gehören, sind einander gleich. III. 101.

71. Einen gegebenen Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen. III. 101 f.

72. Zwey in einem Kreise sich schneidende Linien, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, halbiren einander nicht. III. 102 f.

73. Wenn man aus einem Punkte innerhalb eines Kreises, der nicht der Mittelpunkt ist,

ist, gerade Linien nach dem Umfange des Kreises zieht; so ist

1. diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, unter allen die größte;

2. diejenige, die mit der durch den Mittelpunkt gezogenen in einer geraden Linie liegt, unter allen die kleinste;

3. eine jede dieser Linien größer oder kleiner als eine andere, je nachdem sie dem Mittelpunkte näher oder weiter von demselben entfernt ist;

4. lassen sich aus dem gedachten Punkte nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien nach dem Umkreise ziehen, und von diesen beyden liegt die eine auf der einen und die andere auf der andern Seite der Linie, die durch den Mittelpunkt geht. III. 106-111.

74. Wenn man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises gerade Linien

1. innerhalb nach dem Umkreise zieht; so ist

a) diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, die größte von allen;

b) eine jede dieser Linien größer als jede andere, die weiter als sie von dem Mittelpunkte entfernt ist;

c) lassen sich von dem angenommenen Punkte nach dem Umfange des Kreises nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien ziehen, welche aber auf zwey verschiedene Seiten der Linie fallen, die durch den Mittelpunkt geht.

III.

III. 111. 113. Wenn man aber aus dem gedachten Punkte

2. ausserhalb nach dem Umkreise gerade Linien zieht; so ist

a) diejenige, die verlängert durch den Mittelpunkt geht, unter allen die kleinste;

b) von den übrigen Linien diejenige immer die größere, die von dem Mittelpunkte weiter entfernt ist;

c) lassen sich aus diesem Punkte nach dem Umkreise nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien ziehen, und diese fallen auf zwey verschiedene Seiten derjenigen Linie, die durch den Mittelpunkt geht. III. 113. 114.

75. In einem Kreise stehen gleiche Sehnen vom Mittelpunkte gleich weit ab, und wenn in einem Kreise zwey Sehnen vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind sie einander gleich. III. 115 f.

76. In einem Kreise ist die größere Sehne dem Mittelpunkte näher als die kleinere, und wenn in einem Kreise eine Sehne dem Mittelpunkte näher ist als eine andere, so ist sie auch größer als diese andere. III. 119 f.

77. Sätze vom Wachsen und Abnehmen der Sinus und Cosinus. III. 128 f.

78. Wenn aus dem Endpunkte eines Halbmessers eine senkrechte Linie aufgerichtet ist, so ist dieselbe eine Tangente des Kreises. III. 134 f.

79.

79. Für einen gegebenen Punkt in dem Umfange eines Kreises eine Tangente zu ziehen. III. 136. 137.

80. Sätze vom Wachsen und Abnehmen der Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten der Winkel. III. 140 f.

81. Zwey Kreise, die sich einander schneiden, haben nicht einerley Mittelpunkt. III. 150.

82. Zwey Kreise, die sich entweder von innen oder von aussen berühren, haben nicht einerley Mittelpunkt. III. 150 f.

83. Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises drey gleiche gerade Linien nach dem Umfange gezogen werden können; so ist solches der Mittelpunkt dieses Kreises. III. 152 f.

84. Zwey Kreise können sich in nicht mehr als in zwey Punkten schneiden. III. 154.

85. Wenn sich zwey Kreise von innen oder von aussen berühren, so liegen ihre beyde Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in einer geraden Linie. III. 155 f.

86. Zwey Kreise zu beschreiben, die sich entweder von innen oder von aussen berühren. III. 158.

87. Winkel am Mittelpunkte Eines Kreises sind gleich, wenn ihre Schenkel auf gleichen Bogen ruhen. III. 162.

88. In einem jeden Kreise ist der Winkel am Mittelpunkte doppelt so groß als der Win-

kel

kel am Umkreise, wenn beyder Schenkel auf einerley Bogen ruhen. III. 163 f.

89. Winkel am Umkreise, deren Schenkel auf einerley oder gleichen Bogen ruhen, sind einander gleich. III. 168 f.

90. Winkel am Umfange, deren Schenkel auf einem halben Umkreise ruhen, sind rechte Winkel. III. 169.

91. Alle Winkel in Einem Abschnitte sind einander gleich. III. 172 f.

92. In jedem Vierecke, dessen Winkelspitzen in dem Umfange eines Kreises liegen, sind jede zwey gegenüber liegende Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel. III. 173.

93. Abschnitte, die einerley Winkel enthalten und über gleichen geraden Linien liegen, sind einander gleich. III. 175.

94. Den Kreis zu ergänzen, zu welchen ein gegebener Abschnitt gehört. III. 175 f.

95. In gleichen Kreisen ruhen gleiche Winkel am Mittelpunkte oder am Umfange auf gleichen Bogen. III. 180 f. auch sind in gleichen Kreisen die Winkel am Mittelpunkte oder am Umfange, die auf gleichen Bogen ruhen, einander gleich. III. 183 f.

96. Der Winkel im Halbkreise ist einem rechten Winkel gleich; der Winkel in einem Abschnitte, der größer ist als ein halber Kreis, ist ein spitzer, und der Winkel in einem Ab-

schnitte, der kleiner ist als ein halber Kreis, ein stumpfer Winkel. III. 185 f.

97. Wenn eine gerade Linie einen Kreis berührt, und eine andere vom Berührungspunkte an ihn schneidet; so sind die Winkel, welche die Tangente mit der schneidenden Linie macht, wechselsweise den Winkeln in den durch die schneidende Linie gemachten Abschnitten gleich. III. 190 f.

98. Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, der einen gegebenen Winkel enthält. III. 193.

99. Ueber einer gegebenen geraden Linie einen Abschnitt zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel enthält. III. 194.

100. Wenn in einem Kreise zwey gerade Linien sich schneiden, so sind die Rechtecke zwischen den Theilen derselben einander gleich. III. 197-203.

101. Wenn aus einem Punkte ausserhalb eines Kreises eine Tangente und eine andere Linie innerhalb nach dem Umfange gezogen wird; so ist das Quadrat der Tangente so groß als das Rechteck zwischen der andern ganzen Linie und ihrem Theile ausser dem Kreise. III. 203 f.

102. Wenn aus einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwey gerade Linien gezogen werden, davon die eine den Kreis trifft, die andere aber ihn schneidet, und das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem Stücke

ausser

ausser dem Kreise dem Quadrate der ersten Linie gleich ist; so ist diese eine Tangente. III. 207 f.

103. Von den vermischtlinigen Winkeln, welche Halbmesser oder Sehnen oder Tangenten mit ihren Bogen machen III. 209 f.

104. Eine gerade Linie, die kleiner ist als der Durchmesser eines Kreises in den Kreis zu legen. IV. 8. 9.

105. Um ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben. IV. 9. 10.

106. Um ein Viereck, worin jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel sind, einen Kreis zu beschreiben. IV. 11 f.

107. In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben. IV. 14 : 17.

108. Ein Dreyeck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben. IV. 23 f.

109. Ein Dreyeck um einen gegebenen Kreis zu beschreiben. IV. 25 f.

110. In oder um ein gleichseitiges Dreyeck einen Kreis zu beschreiben. IV. 29 f. 40. 41.

111. In oder um einen Kreis ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben. IV. 30 f.

112. In oder um ein Quadrat einen Kreis zu beschreiben. IV. 32 f.

113. In oder um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben. IV. 36 f. 38.

114. Einen Kreis in vier gleiche Theile zu theilen. IV. 37.

115. Einen Kreis in drey gleiche Theile zu theilen. IV. 39 f.

116. Einen Kreis in sechs, zwölf, vier und zwanzig u. s. w. gleiche Theile zu theilen. IV. 41.

117. Einen Kreis in acht, sechszehn, zwey und dreyßig u. s. w. gleiche Theile zu theilen. IV. 41. 42.

118. Wenn man einen Kreis in acht gleiche Theile theilt, und die Sehnen der dadurch erhaltenen Bogen zieht; so wird dadurch ein reguläres Achteck in den Kreis beschrieben. IV. 42.

119. Wenn man einen Kreis in acht gleiche Theile theilt, und die Sehnen der dadurch erhaltenen Bogen zieht, so wird dadurch ein reguläres Achteck in den Kreis beschrieben. IV. 42 f.

120. Wenn man einen Kreis in acht gleiche Theile theilt und durch die Theilungspunkte Tangenten legt und dieselben verlängert bis je zwey und zwey sich schneiden; so wird dadurch ein reguläres Achteck um den Kreis beschrieben. IV. 42 f.

121. Wenn man einen Kreis in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilt und die Sehnen der dadurch entstehenden Bogen zieht; so erhielt man jedesmal eine in den Kreis beschriebene reguläre Figur von so viel Seiten, als man in dem Kreise Theile gemacht hat. IV. 48 f.

122. Wenn man einen Kreis in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilt, und durch die Theilungspunkte Tangenten legt und dieselben

so weit verlängert, bis je zwey und zwey sich schneiden; so erhält man jedesmal eine um den Kreis beschriebene reguläre Figur von so viel Seiten als man den Kreis in Theile getheilt hat. IV. 49 f.

123. Wenn man zwey an Einer Seite einer regulären Figur liegende Winkel in zwey gleiche Theile theilt, die Theilungslinien verlängert bis sie sich schneiden, und aus dem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von der Spitze eines der getheilten Winkel einen Kreis beschreibet; so geht dieser Kreis durch alle Winkelspitzen der regulären Figur oder er wird um dieselbe beschrieben. IV. 53 f.

124. Wenn man zwey Einen Winkel einer ordentlichen Figur einschließende Seiten in zwey gleiche Theile theilt, aus den Theilungspunkten senkrechte Linien auf denselben errichtet, diese verlängert bis sie sich schneiden, und aus dem Schneidungspunkte mit seiner Entfernung von den gedachten Theilungspunkten einen Kreis beschreibet; so wird dieser Kreis in die gedachte ordentliche Figur beschrieben. IV. 55 f.

125. Eine jede reguläre um einen Kreis beschriebene Figur ist größer als der Kreis. IV. 58.

126. Eine jede reguläre Figur ist so groß als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange der regulären Figur und die andere dem Radius des in sie beschriebenen Kreises gleich ist. IV. 58. 59. 62.

127. Eine jede in einen Kreis beschriebene reguläre Figur ist kleiner als der Kreis. IV. 62.

128. Ein gleichschenkliges Dreyeck zu beschreiben, worin jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß ist als der Winkel an der Spitze. IV. 66. 67.

129. Einen Kreis in fünf gleiche Theile zu theilen. IV. 64-66. 68. 69.

130. Wenn man in einen Kreis zwey reguläre Vielecke beschreibt, davon das eine doppelt so viel Seiten hat als das andere; so ist nicht nur das Vieleck von doppelt so viel Seiten größer als das andere, sondern es hat auch einen größern Umfang. IV. 70. 71.

131. Wenn man in einen Kreis zwey reguläre Vielecke beschreibt, davon das eine doppelt so viel Seiten hat als das andere, so sind beyde kleiner als der Kreis, allein der Unterschied zwischen dem Vielecke von doppelt so viel Seiten und dem Kreise ist kleiner als die Hälfte des Unterschiedes zwischen dem andern Vielecke und dem Kreise; auch ist der Unterschied zwischen dem Umfange jenes Vielecks und der Peripherie des Kreises kleiner als der Unterschied zwischen dem Umfange dieses und der Peripherie des Kreises. IV. 71. 76.

132. Wenn man um einen Kreis zwey reguläre Vielecke beschreibt, davon das eine doppelt so viel Seiten hat als das andere; so sind beyde größer als der Kreis, aber der Unterschied zwischen dem regulären Vielecke von dop-

doppelt so viel Seiten und dem Kreise beträgt weniger als die Hälfte zwischen dem andern Vielecke und dem Kreise. IV. 76.

133. Eine jede reguläre in einen Kreis beschriebene Figur ist kleiner als ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen eine Cathete dem Umfange und die andere dem Radius dieses Kreises gleich ist; so wie jede um den Kreis beschriebene reguläre Figur größer ist als ein solches Dreyeck. IV. 78 f.

134. In und um einen jeden Kreis läßt sich ein reguläres Vieleck gedenken, dessen Unterschied vom Kreise weniger beträgt als jede gegebene Größe. IV. 82 f.

135. Ein Kreis ist einem rechtwinkligen Dreyecke gleich, dessen eine Cathete dem Umfange des Kreises und die andere seinem Radius gleich ist. IV. 87 f.

136. Eine jede gegebene gerade Linie in eine jede verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen. IV. 95 f.

137. Wenn in einem Dreyecke mit einer Seite desselben eine Parallellinie gezogen wird; so theilet dieselbe die beyden übrigen Seiten des Dreyecks in proportionale Theile. IV. 99 f. es mögen die Theile dieser beyden übrigen Seiten gegen einander commensurabel seyn, IV. 99-103 oder nicht. 104. f.

138. Wenn in zwey Dreyecken alle Winkel des einen stückweise den Winkeln des andern gleich sind; so sind auch je zwey Seiten

des einen je zwey Seiten des andern proportional, wenn man diese Seiten entweder so nimmt, daß die gleichnamigen Seiten auch gleichliegende werden, oder so, daß die beyden ersten und die beyden lezten Glieder der Proportion gleichliegende Glieder sind. IV. 113 f.

139. Wenn man aus der Spitze des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreyecke eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse fällt; so ist

a) diese senkrechte Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen der Hypothenuse. IV. 122 und

b) jede Cathete die mittlere Proportionallinie zwischen den angrenzenden Theilen der Hypothenuse und der ganzen Hypothenuse. IV. 122 f.

140. Wenn in einem Halbkreise aus einem Punkte der Peripherie eine senkrechte Linie auf den Halbmesser gezogen wird; so ist dieselbe die mittlere Proportionallinie zwischen den dadurch gemachten Theilen des Halbmessers. IV. 124 f.

141. Zu drey gegebenen Proportionallinien die vierte zu finden. IV. 125 f.

142. Zu zwey gegebenen Proportionallinien die dritte zu finden. IV. 126.

143. Zwischen zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden. IV. 126 f.

144. Wenn in einem Kreise zwey Sehnen sich schneiden; so sind die Theile derselben unter einander proportional. IV. 127.

145. Einige andere Sätze von den Proportionallinien beym Kreise. IV. 127 f.

146. Dreyecke, die zwischen einerley Parallelen liegen, verhalten sich wie ihre Grundlinien. IV. 129 f. und eben das ist von Parallelogrammen wahr. IV. 131.

147. Wenn zwey Rechtecke einander gleich sind, so stehen die Seiten derselben in Proportion, wenn man die Seiten des einen zu den äussern und die Seiten des andern zu den mittlern Gliedern macht. IV. 131 f.

148. Wenn vier gerade Linien proportional sind; so ist das Rechteck zwischen den beyden äussern Linien dem Rechtecke zwischen den beyden mittlern gleich. IV. 132 f.

149. Wenn drey gerade Linien proportional sind; so ist das Rechteck zwischen den beyden äussern Linien dem Quadrate der mittlern gleich. IV. 133.

150. Die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist. IV. 136.

151. Die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Rechtecke gleich ist. IV. 136.

152. Die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen schiefwinkligen Parallelogramme gleich ist. IV. 136. 137.

153. Die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen regulären Vielecke gleich ist. IV. 137.

154. Die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Kreise gleich ist. IV. 137.

155. Ein jedes Dreyeck ist so groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der halben Grundlinie und der Höhe des Dreyecks ist. IV. 137.

156. Ein Rechteck ist gleich einem Quadrate, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seiten des Rechtecks ist. IV. 138.

157. Ein jedes Parallelogramm ist so groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und der Höhe des Parallelogramms ist. IV. 138.

158. Ein jedes reguläre Vieleck ist so groß als ein Quadrat, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen dem halben Umfange des Vielecks und dem Radius des in dasselbe beschriebenen Kreises ist. IV. 138.

159. Ein Kreis ist gleich einem Quadrate, dessen Seite die mittlere Proportionallinie zwischen dem halben Umfange und dem Radius des Kreises ist. IV. 138.

160. Die Höhe eines Thurms zu bestimmen, ohne ihn unmittelbar zu messen. IV. 139 f.

Ver-

Verzeichniß

der

Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, Aufgaben und Lehrsätze in den vier ersten Büchern der Elemente des Euclides, welche in diesen Versuchen vorkommen.

Die römischen Zahlen unter dem Titel: Euclids Elemente, zeigen das Buch, und die teutschen die Erklärungen, Forderungen u. s. w. an. Die Zahlen unter dem Titel: Versuche u. s. w. haben dieselbe Bedeutung, die sie in dem vorhergehenden Verzeichniß gehabt haben.

Euclids Elemente			Versuche u. s. w.
Erklärungen.			
I.	1.	—	—
—	2.	—	I. 8 - 10.
—	3.	—	—
—	4.	—	I. 11 - 14.
—	5.	—	I. 19 - 21.
—	6.	—	—
—	7.	—	I. 21 - 22.
—	8.	—	I. 30. 31.
—	9.	—	I. 29. 30.
—	10.	—	I. 33 - 35.

Eu-

Euclids Elemente			Versuche u. s. w.
I.	11.	—	I. 33 - 35.
—	12.	—	I. 33 - 35.
—	13.	—	—
—	14.	—	I. 39 f.
—	15.	—	I. 48. 49. III. 86. 87.
—	16.	—	— —
—	17.	—	III. 87. 88.
—	18.	—	III. 91.
—	19.	—	II. 91.
—	20.	—	I. 42. 43.
—	21.	—	I. 44.
—	22.	—	I. 44.
—	23.	—	I. 44.
—	24.	—	I. 44. 45.
—	25.	—	I. 44. 45.
—	26.	—	I. 44. 45.
—	27.	—	I. 48.
—	28.	—	I. 48.
—	29.	—	I. 48.
—	30.	—	II. 117. 118.
—	31.	—	II. 117. 118.
—	32.	—	II. 117. 118.
—	33.	—	II. 117. 118.
—	34.	—	—
—	35.	—	II. 98. 99.

Forderungen.

I.	1.	—	I. 56, 68.
—	2.	—	I. 56. 68.
—	3.	—	I. 56. 57. 68.

Eu-

Euclids Elemente			Versuche u. s. w.

Grundsätze.

I.	1.	—	I. 63. 68.
—	2.	—	I. 63. 64. 69.
—	3.	—	I. 64. 65. 69.
—	4.	—	—
—	5.	—	—
—	6.	—	—
—	7.	—	—
—	8.	—	I. 66. 70.
—	9.	—	—
—	10.	—	—
—	11.	—	I. 85. f.
—	12.	—	—

Aufgaben und Lehrsätze.

I.	1.	—	I. 60. 62.
—	2.	—	—
—	3.	—	I. 57. 58.
—	4.	—	I. 71. 76.
—	5.	—	I. 77. 88 - 96.
—	6.	—	I. 101 f.
—	7.	—	I. } 108.
—	8.	—	I. } 108.
—	9.	—	II. 4. 21 f.
—	10.	—	II. 4. 31 f.
—	11.	—	II. 4. 33.
—	12.	—	II. 4. 34 f.
—	13.	—	II. 23 f.
—	14.	—	II. 28 f.
—	15.	—	II. 26 f.

Eu-

Euclids Elemente		Versuche u. s. w.
I. 16.	—	II. 38.
— 17.	—	II. 48 f.
— 18.	—	II. 54 f.
— 19.	—	II. 58 f.
— 20.	—	II. 60 f.
— 21.	—	II. 65 f.
— 22.	—	II. 62.
— 23.	—	II. 63.
— 24.	—	II. 73 f.
— 25.	—	II. 77 f.
— 26.	—	II. 87 f.
— 27.	—	II. 99 f.
— 28.	—	II. 99 f.
— 29.	—	II. 105 f.
— 30.	—	II. 110.
— 31.	—	II. 111 f.
— 32.	—	II. 112. 113.
— 33.	—	II. 114.
— 34.	—	II. 115. 126 f.
— 35.	—	II. 128 f.
— 36.	—	II. 131 f.
— 37.	—	II. 133 f.
— 38.	—	II. 133 f.
— 39.	—	II. 137 f.
— 40.	—	II. 137 f.
— 41.	—	II. 140 f.
— 42.	—	II. 142.
— 43.	—	II. 142 f.
— 44.	—	II. 147.

Eu=

Euclids Elemente			Versuche u. s. w.
I.	45.	—	II. 147 f.
—	46.	—	II. 149.
—	47.	—	II. 151 f.
—	48.	—	—
II.	1.	—	—
—	2.	—	III. 11 f. 22 f. 36 f.
—	3.	—	—
—	4.	—	III. 22. 30 f.
—	5.	—	III. 38.
—	6.	—	III. 48 f.
—	7.	—	III. 26 f.
—	8.	—	—
—	9.	—	III. 50-56.
—	10.	—	III. 59 f.
—	11.	—	III. 63 f.
—	12.	—	III. 70 f.
—	13.	—	III. 72 f.
—	14.	—	II. 162.

Erklärungen.

III.	1.	—	III. 92.
—	2.	—	—
—	3.	—	—
—	4.	—	—
—	5.	—	—
—	6.	—	III. 91. 210.
—	7.	—	III. 91. 210.
—	8.	—	III. 90. 171.

Euclids Elemente		Versuche u. s. w.
III. 9.	—	—
— 10.	—	III. 91.
— 11.	—	III. 274.

Aufgaben und Lehrsätze.

III. 1.	—	III. 95.
— 2.	—	—
— 3.	—	III. 100.
— 4.	—	III. 102.
— 5.	—	III. 150.
— 6.	—	III. 150 f.
— 7.	—	III. 106 - 111.
— 8.	—	III. 111 - 114.
— 9.	—	III. 151 f.
— 10.	—	III. 153. 154.
— 11.	—	III. 155 f.
— 12.	—	III. 157.
— 13.	—	III. 159.
— 14.	—	III. 115.
— 15.	—	III. 119.
— 16.	—	III. 134 f.
— 17.	—	III. 145 f.
— 18.	—	III. 147 f.
— 19.	—	III. 147 f.
— 20.	—	III. 163 - 167.
— 21.	—	III. 168 f.
— 22.	—	III. 173.
— 23.	—	III. 174 f.
— 24.	—	III. 175.

Eu=

Euclids Elemente		Versuche u. s. w.
III. 25.	—	III. 175 f.
— 26.	—	III. 180. 181.
— 27.	—	III. 183 f.
— 28.	—	III. 182 f.
— 29.	—	III. 182 f.
— 30.	—	III. 101 f.
— 31.	—	III. 168 f. 185. 186.
— 32.	—	III. 189 f.
— 33.	—	III. 194.
— 34.	—	III. 193.
— 35.	—	III. 197 f.
— 36.	—	III. 203 f.
— 37.	—	III. 203 f.

Erklärungen.

IV. 1.	—	IV. 7.
— 2.	—	IV. 7.
— 3.	—	IV. 5. 6.
— 4.	—	IV. 5. 6.
— 5.	—	IV. 6. 7.
— 6.	—	IV. 6. 7.
— 7.	—	IV. 8.

Aufgaben und Lehrsätze.

IV. 1.	—	IV. 8. 9.
— 2.	—	IV. 21 f.
— 3.	—	IV. 25 f.

Euclids Elemente		Versuche u. s. w.
IV. 4.	—	IV. 14 f.
— 5.	—	IV. 10 f.
— 6.	—	IV. 36 f.
— 7.	—	IV. 36 f.
— 8.	—	IV. 35 f.
— 9.	—	IV. 32 f.
— 10.	—	IV. 66 f.
— 11.	—	IV. 63 f.
— 12.	—	IV. 63 f.
— 13.	—	IV. 63 f.
— 14.	—	IV. 63 f.
— 15.	—	IV. 39 f.
— 16.	—	IV. 69 f.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Verzeichniß einiger Druckfehler.

Im ersten Bande.

S. 137 Z. 5 von unten lese man Cotangenten statt Catangenten.

— 149 — 8 von oben streiche man die Worte, was statt finde, aus.

Im zweyten Bande.

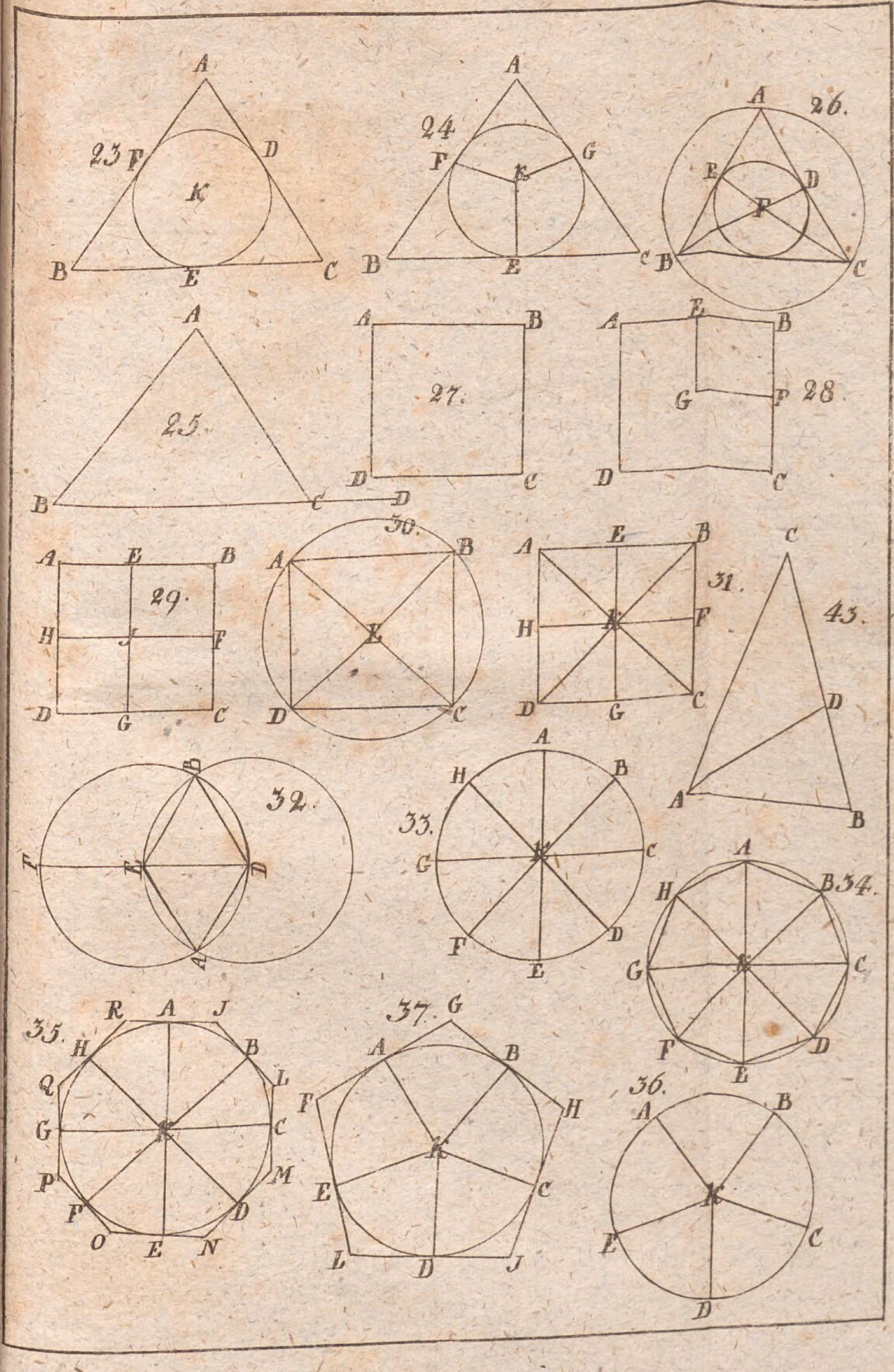
S. 40 Z. 1 lese man *AEBGA* statt ACBGA.

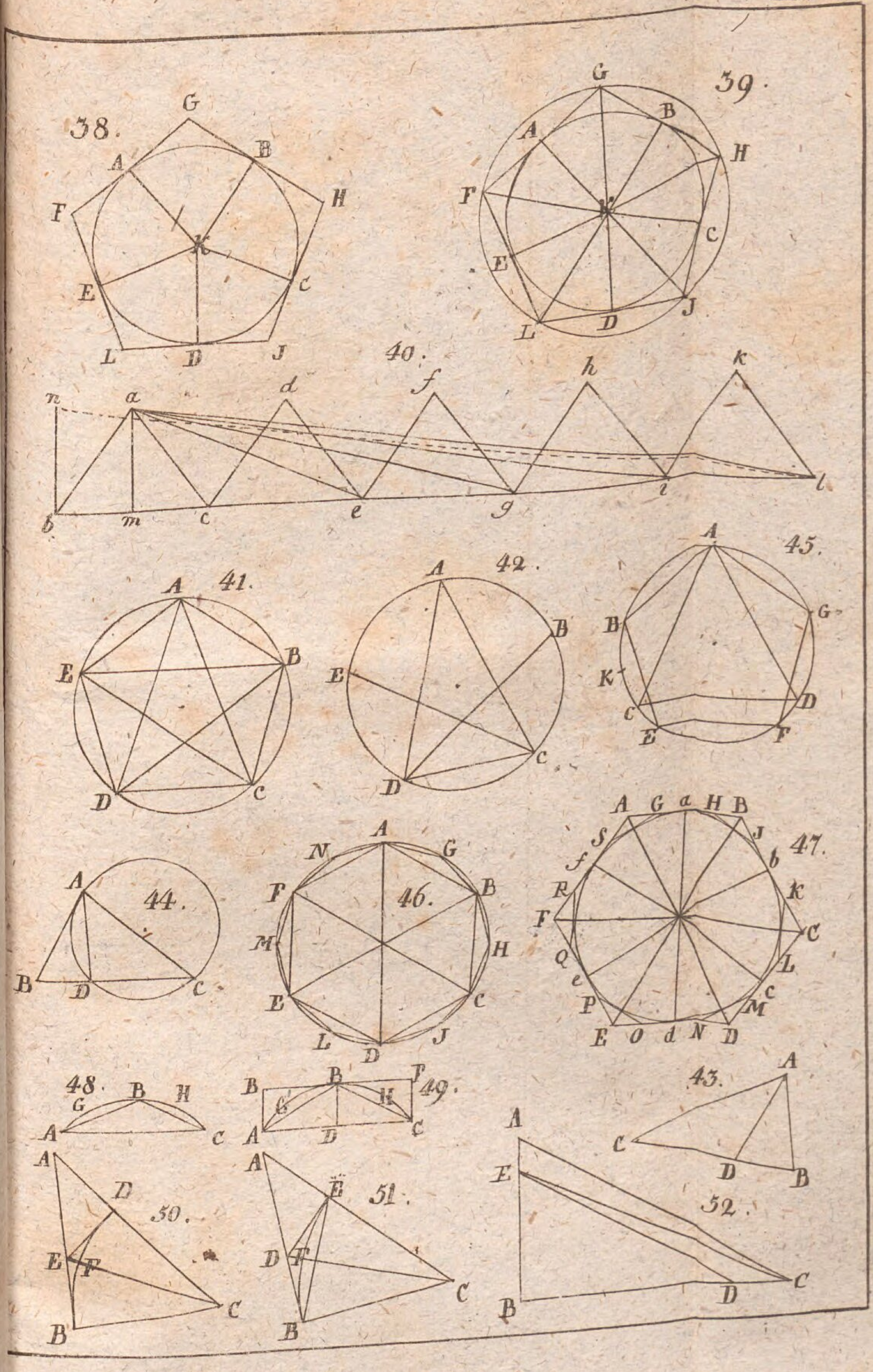
— — — 4 — — nach *D* und *E* statt nach DC.

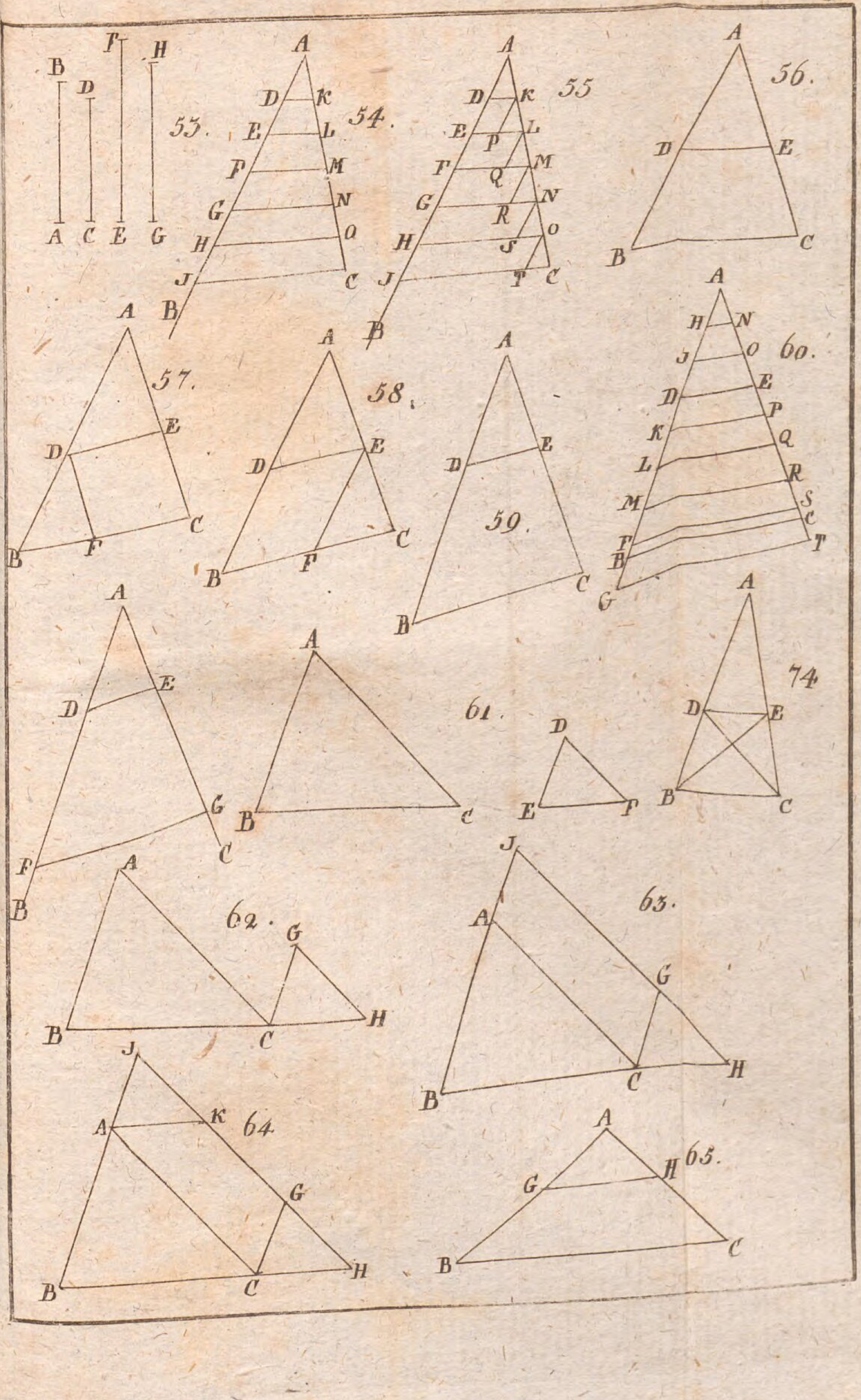
— 48 — 3. 11. 25 lese man 36 statt 35.

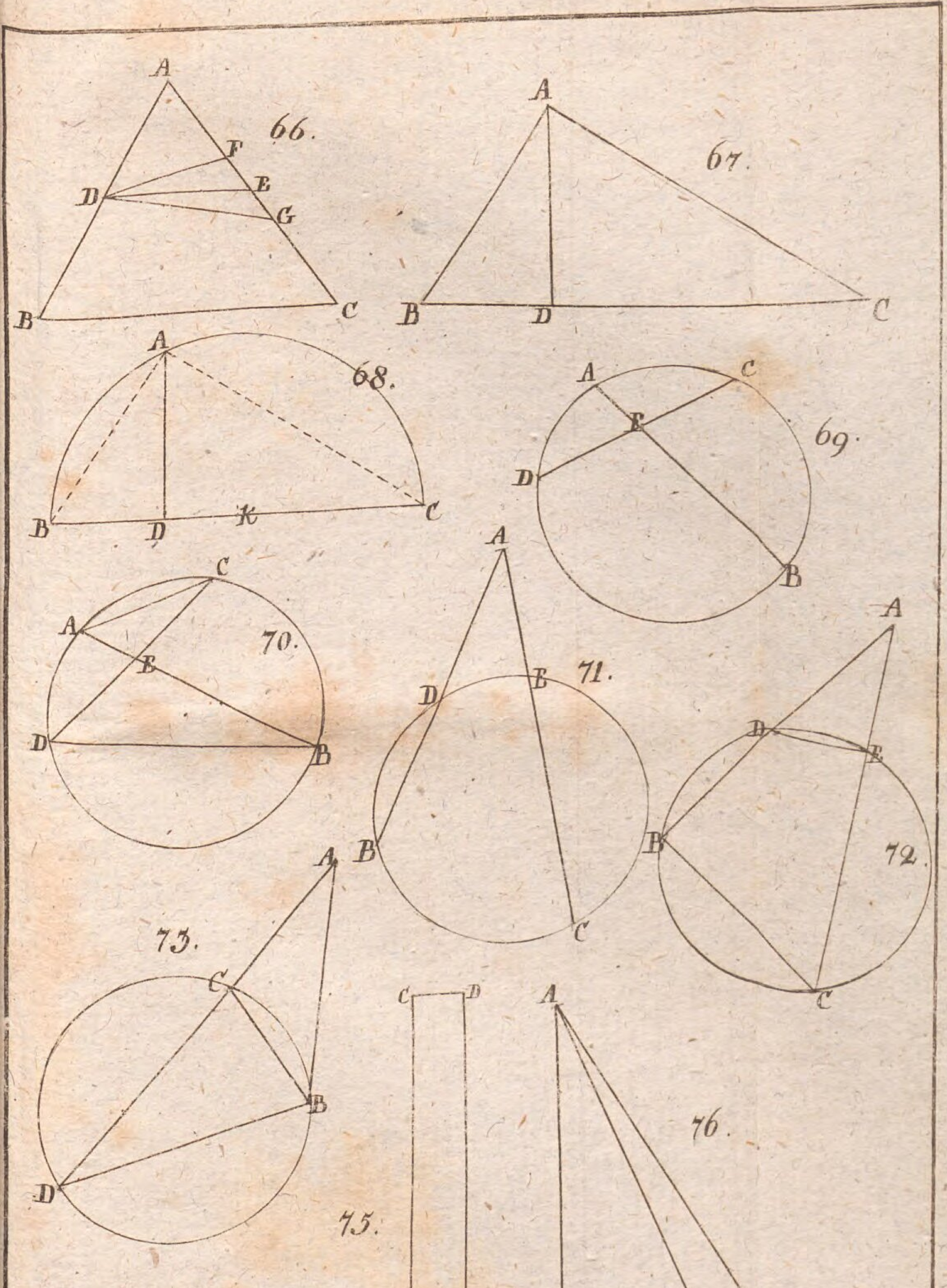
— 69 — 16 — — *A* und *B* statt H und I.

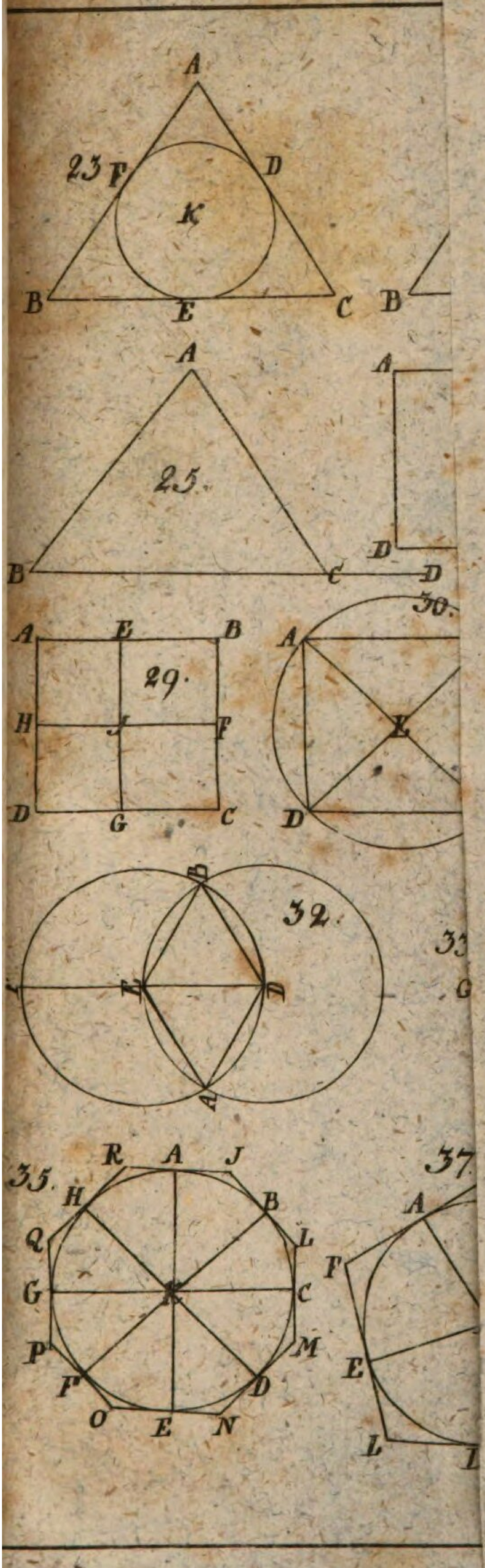
— — — 21 — — *BK* = *KC* statt EC = EB.

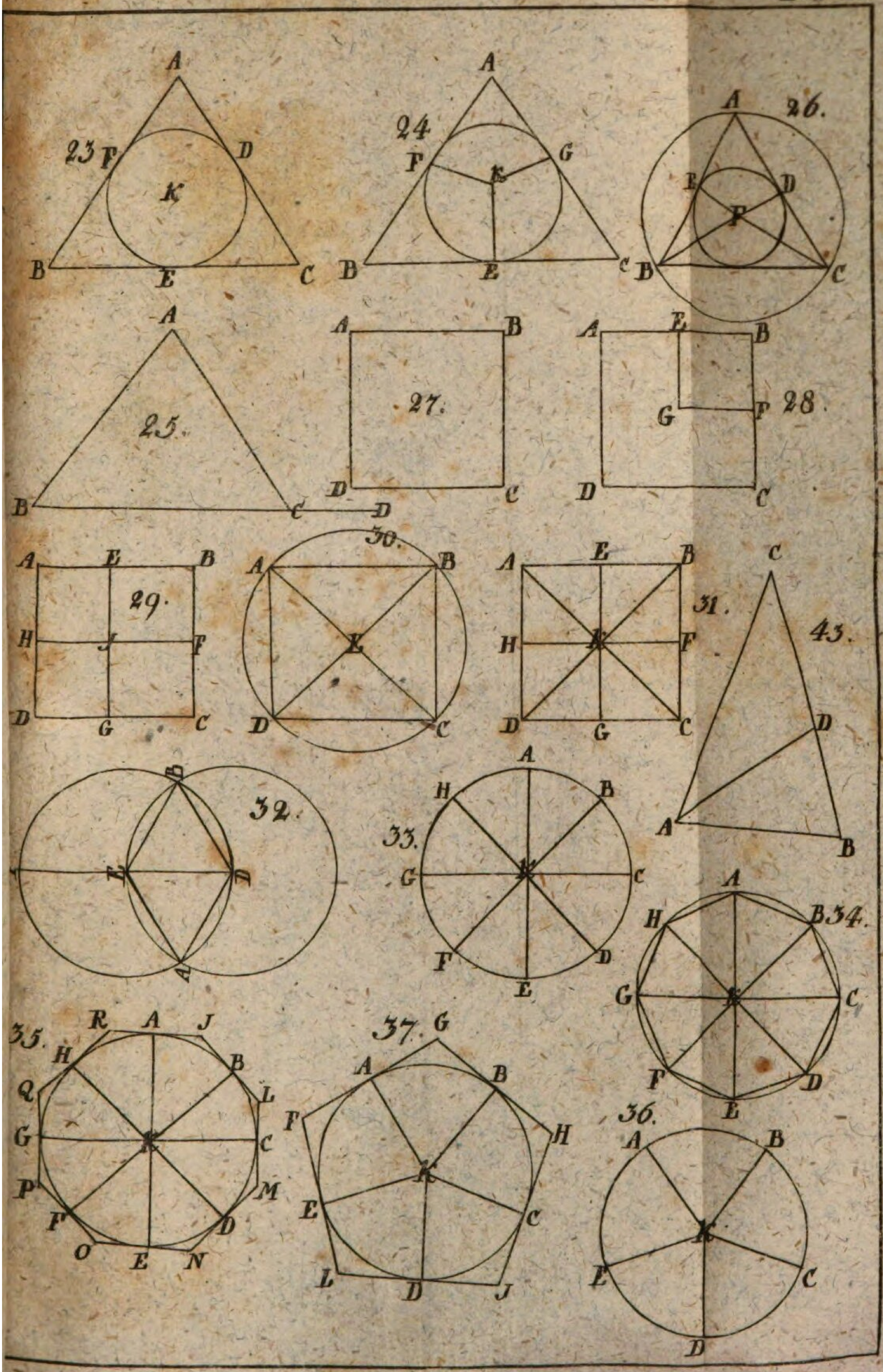

23
24
26.
25.
27.
28
29.
30.
31.
43.
32.
33.
34.
35.
37.
36.

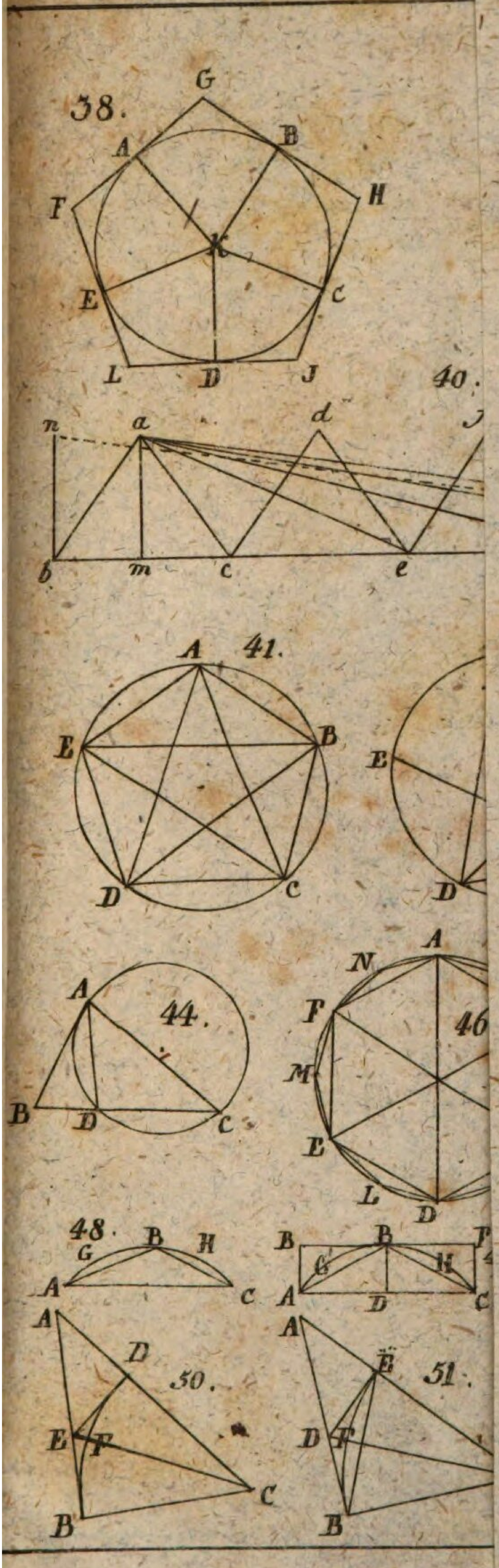

38.
39.
40.
41.
42.
45.
44.
46.
47.
48.
49.
43.
50.
51.
52.

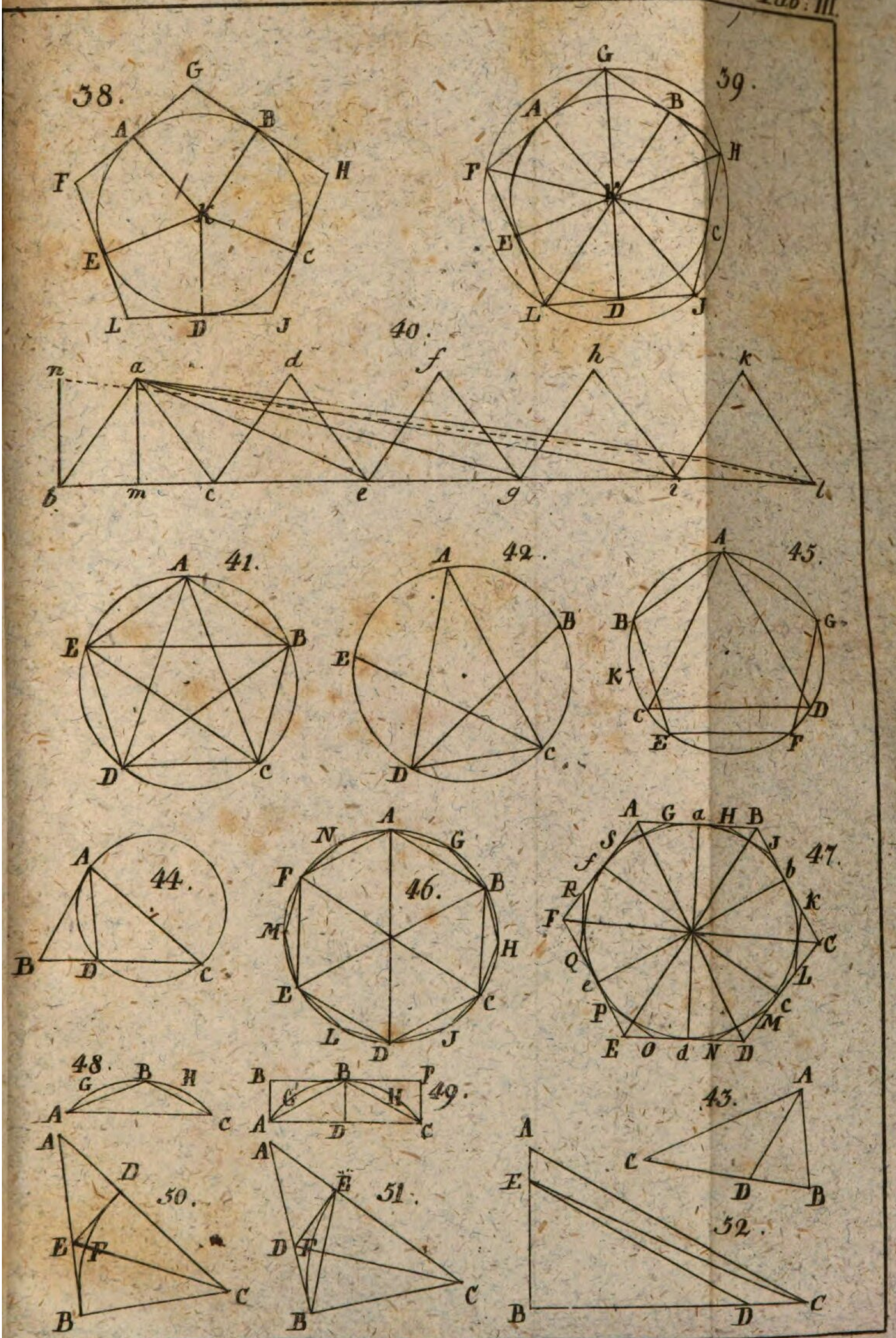

53.
54.
55
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64
65.
74


66.
A
F
D
E
G
B
C
67.
A
B
D
C
68.
A
B
D
K
C
69.
A
C
E
D
B
70.
C
A
E
D
B
71.
A
D
E
B
C
72.
A
D
E
B
C
73.
A
C
B
D
75.
C
D
E
B
A
F
G
H
76.
A
B
C
D

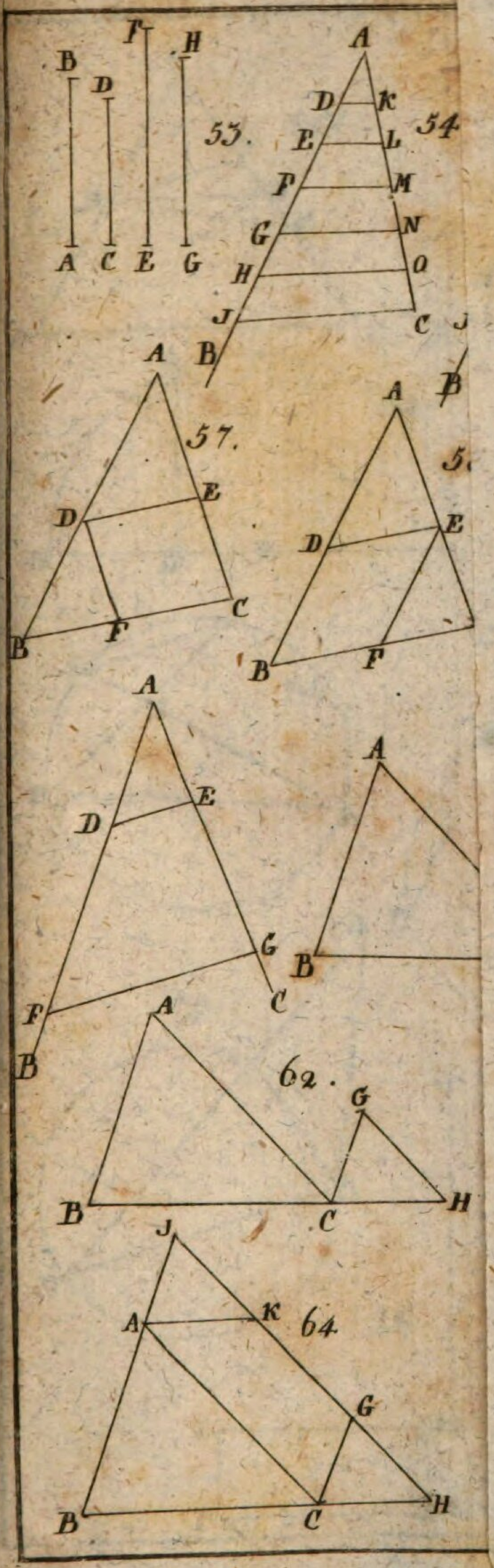

23
25
29
30
32
35
37

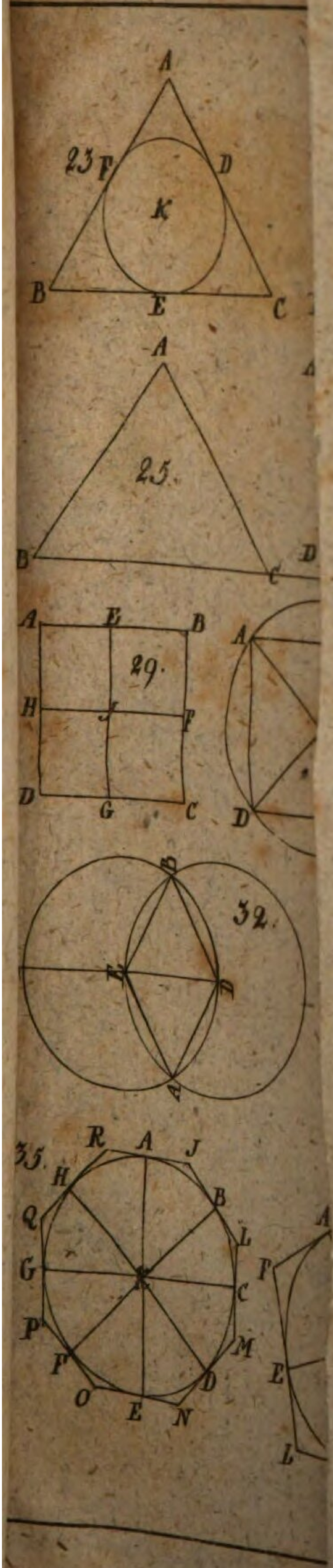

23
24
26.
25.
27.
28.
29.
30.
31.
43.
32.
33.
34.
35.
37.
36.

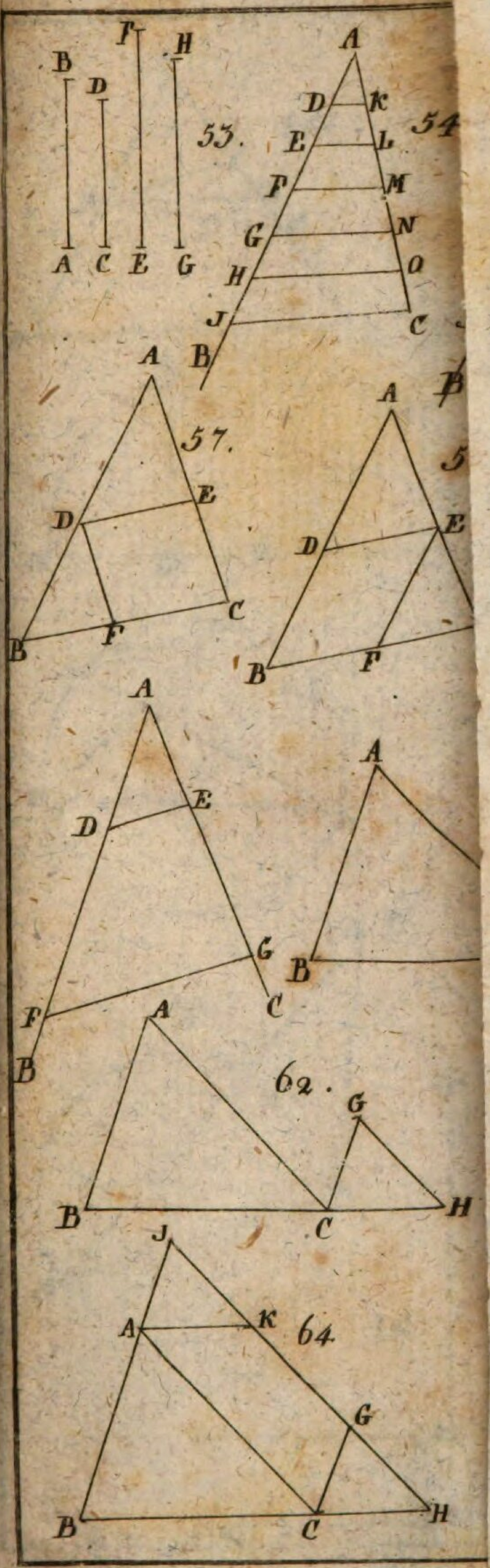

38.
G
A
B
F
H
K
E
C
L
D
J
40.
n
a
d
b
m
c
e
A
41.
E
B
D
C
E
D
A
N
44.
F
46
M
B
D
C
E
L
D
48.
G
B
H
A
C
B
B
F
A
D
C
A
D
50.
E
F
C
B
A
E
51.
D
F
B



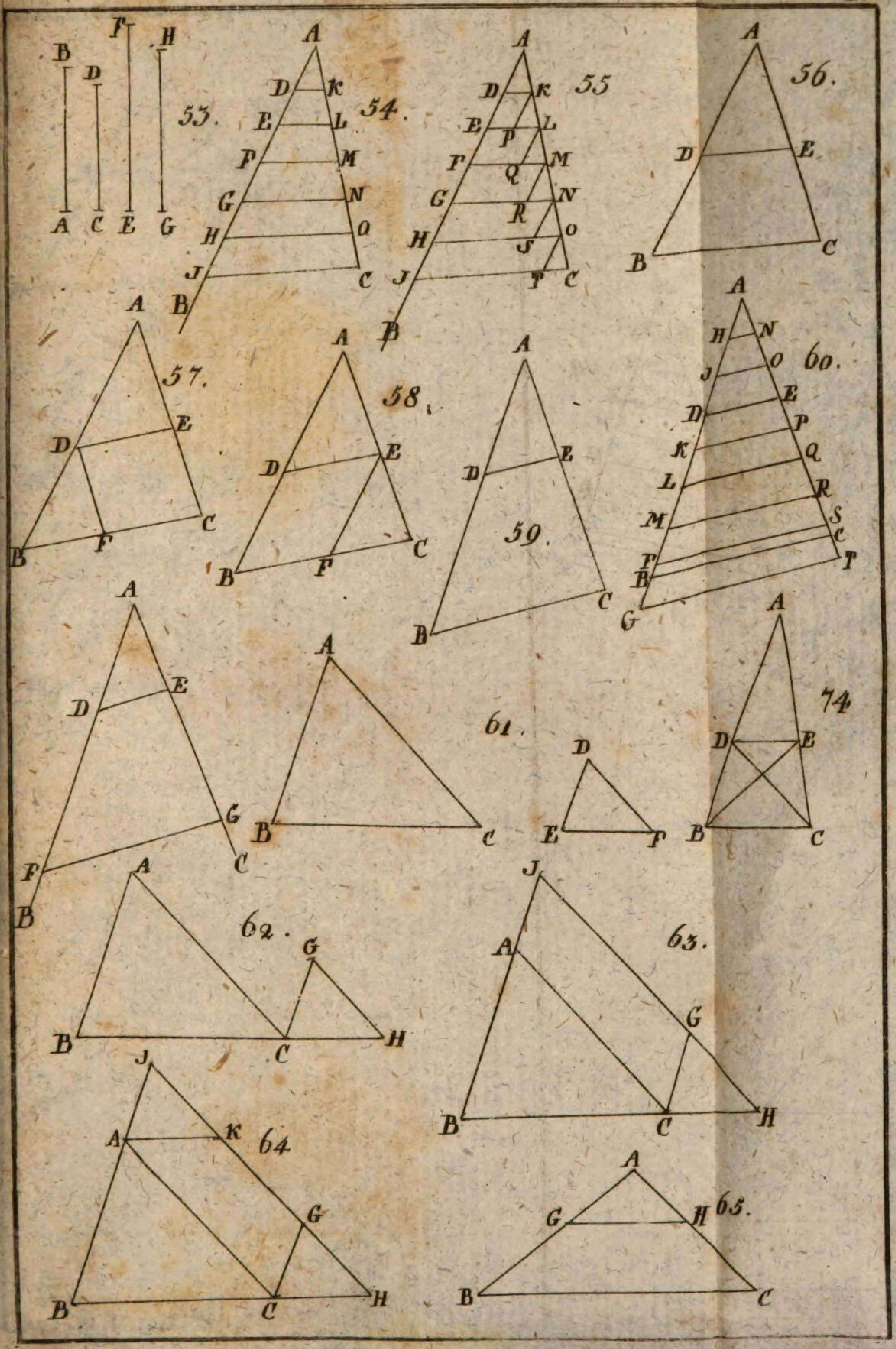
38.
G A B F H K E C L D J
39.
G A B F H K E C L D J
40.
n a d f h k
b m c e g i l
41.
A E B D C
42.
A B E D C
45.
A B G K C D E F
44.
A B D C
46.
A N G F B M H E C L D J
47.
A G a H B S J f b R K F C Q L e c P M E O d N D
48.
G B H A C
49.
B B F G H A D C
43.
A C D B
50.
A D E F B C
51.
A E D F B C
52.
A E B D C


53.
54
57.
62.
64

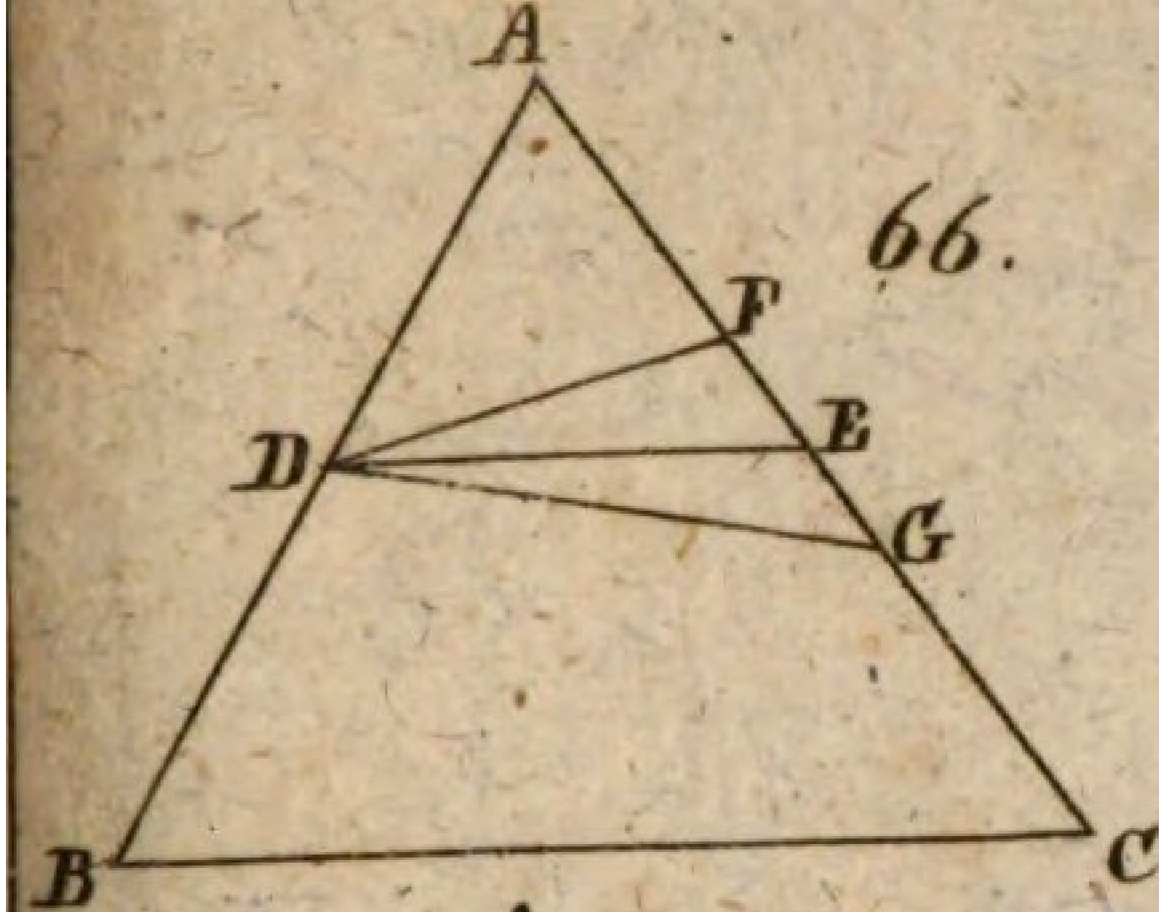

23
A
F
D
K
B
E
C
25.
A
B
C
D
29.
A
E
B
H
F
D
G
C
32.
35.
R
A
J
H
B
Q
L
G
C
P
M
F
D
O
E
N



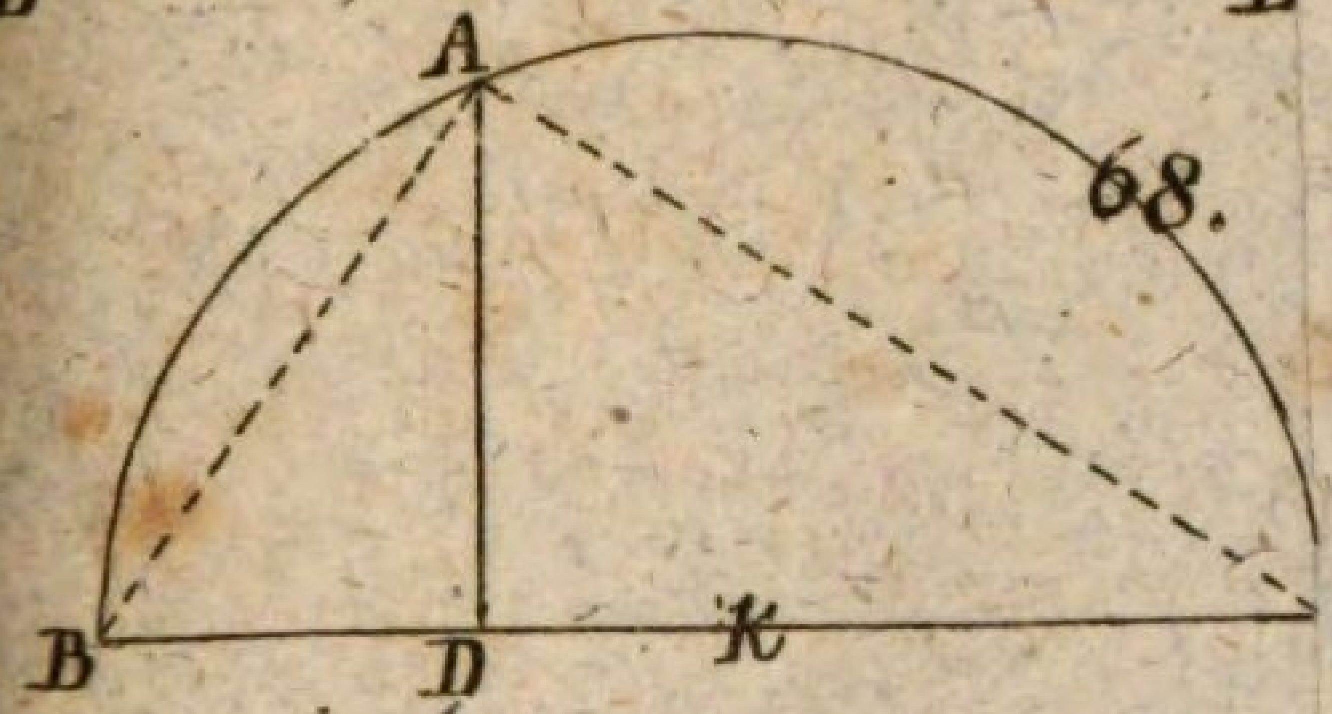
B D I H
A C E G
53.
A
D K
E L
F M
G N
H O
J C
B
54
A
57.
D E
B F C
A
D E
B F
A
D E
F G
B C
A
B
A
62.
G
B C H
J
A K
64
G
B C H


53.
54.
55
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64
65.
74

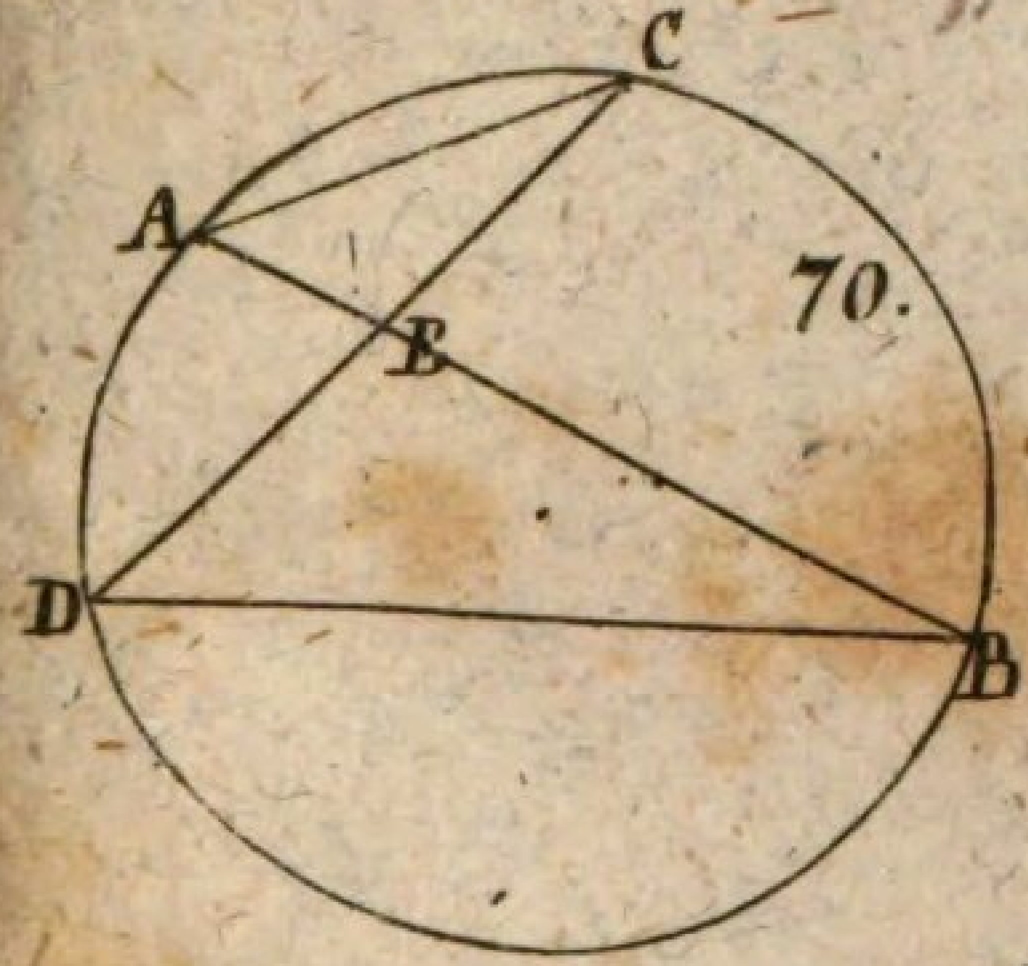
66.

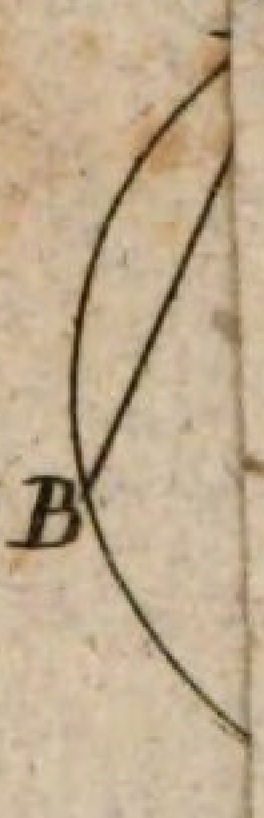


68.

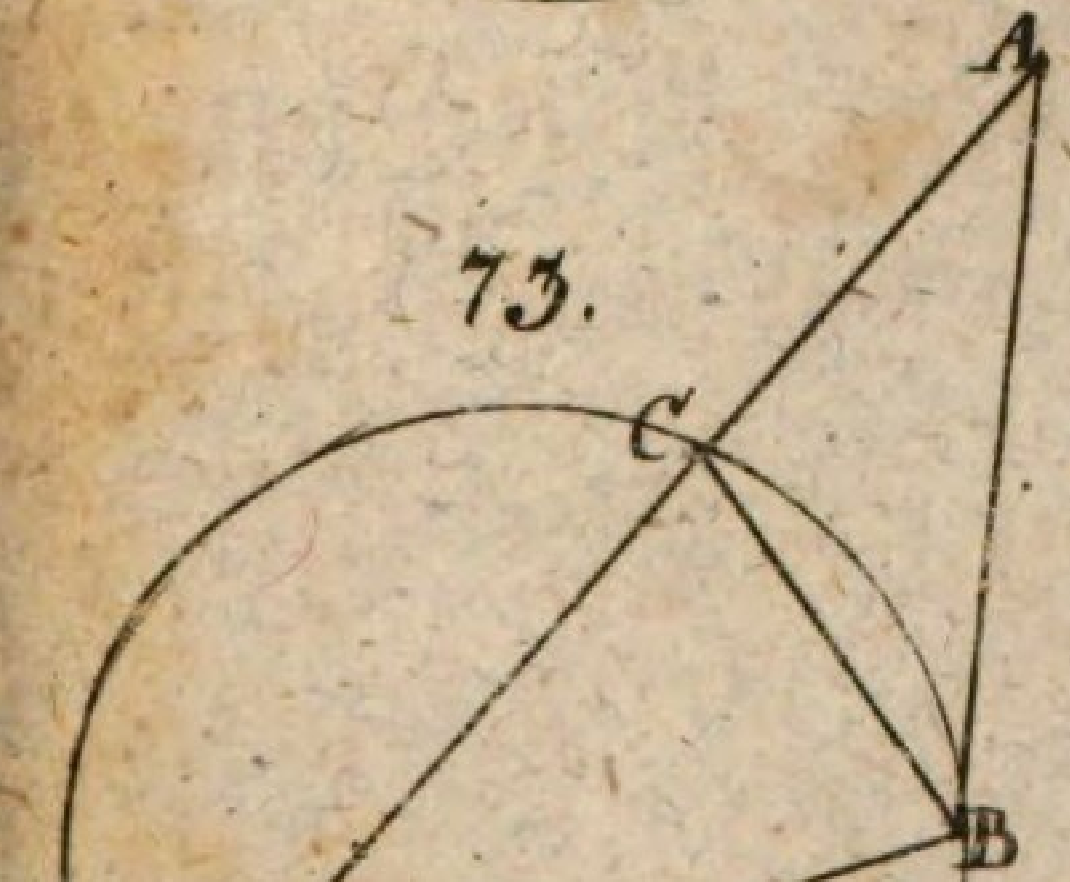


70.

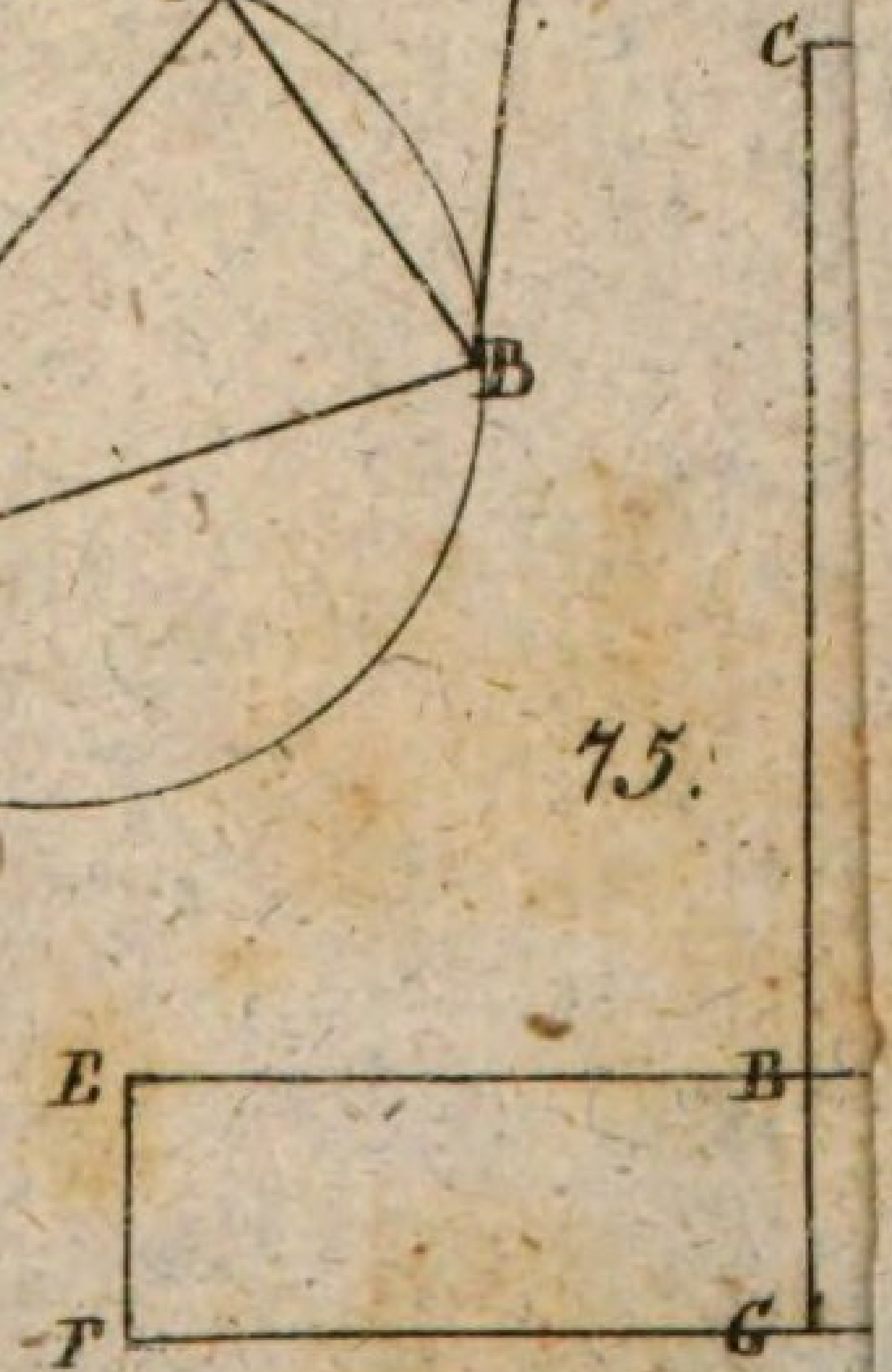




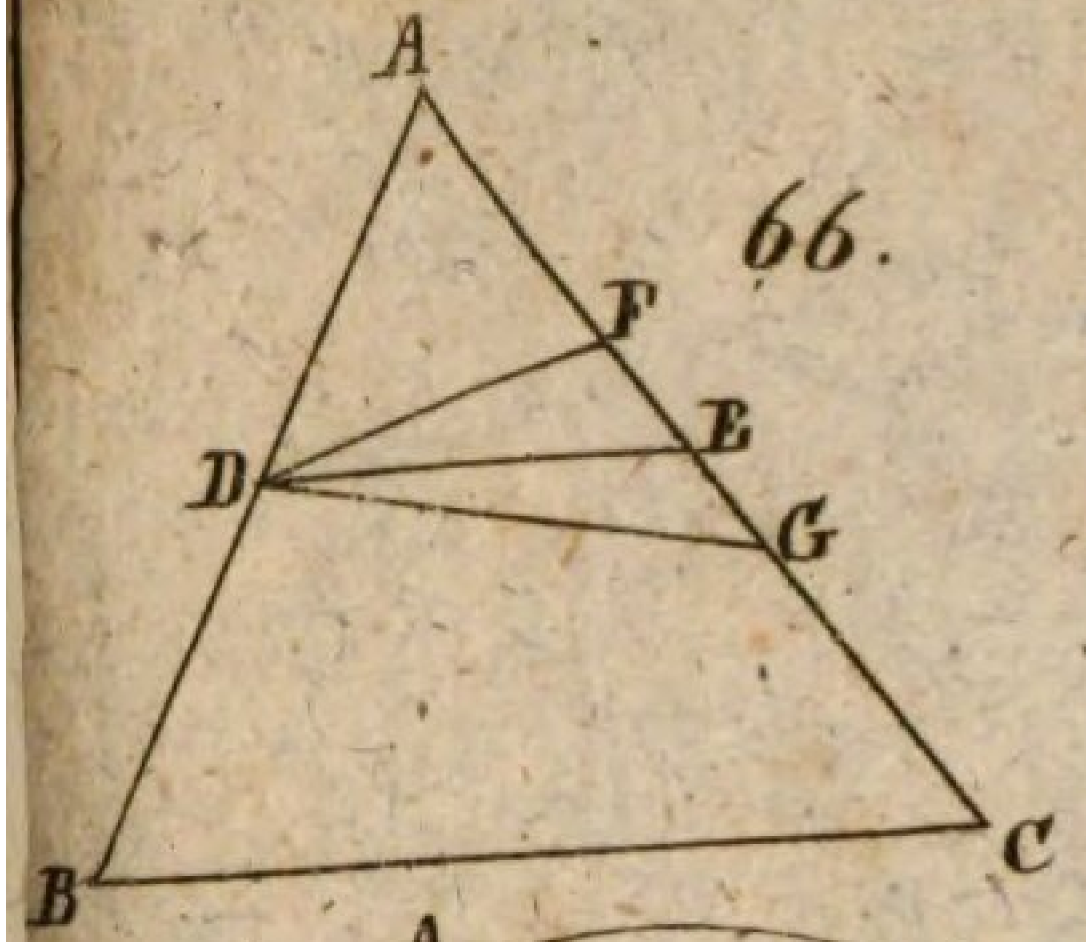
73.



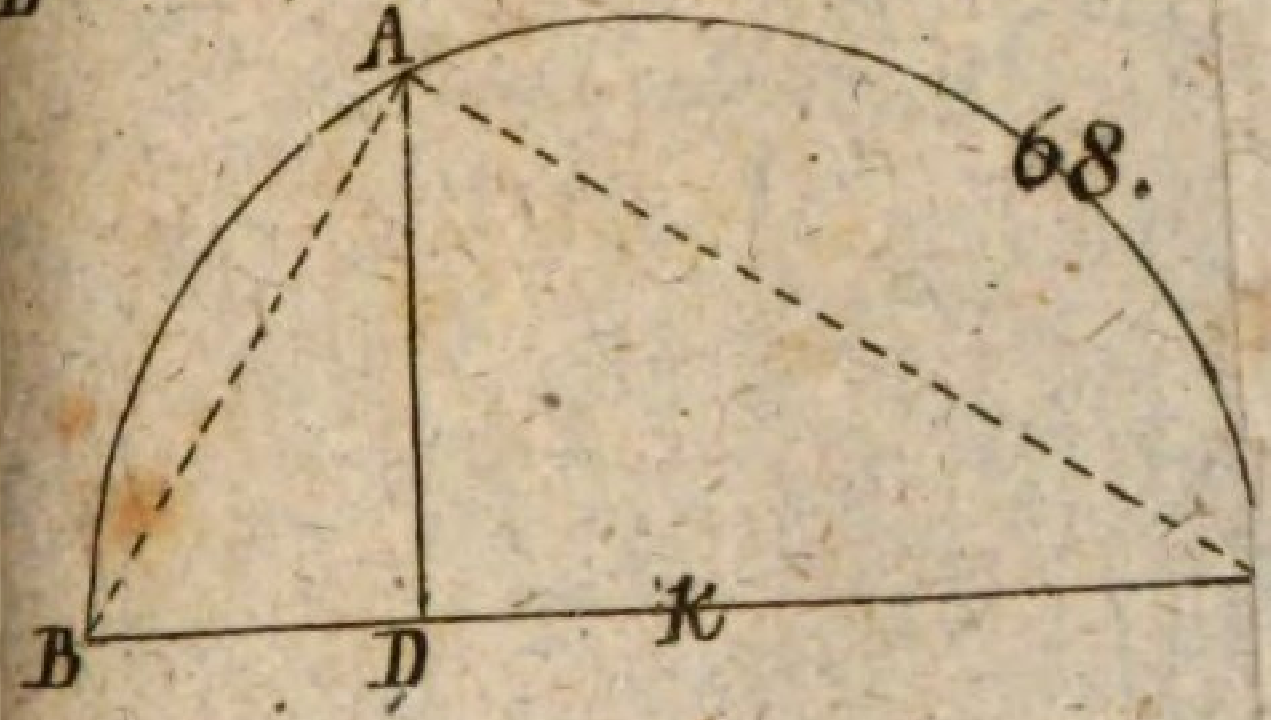
75.



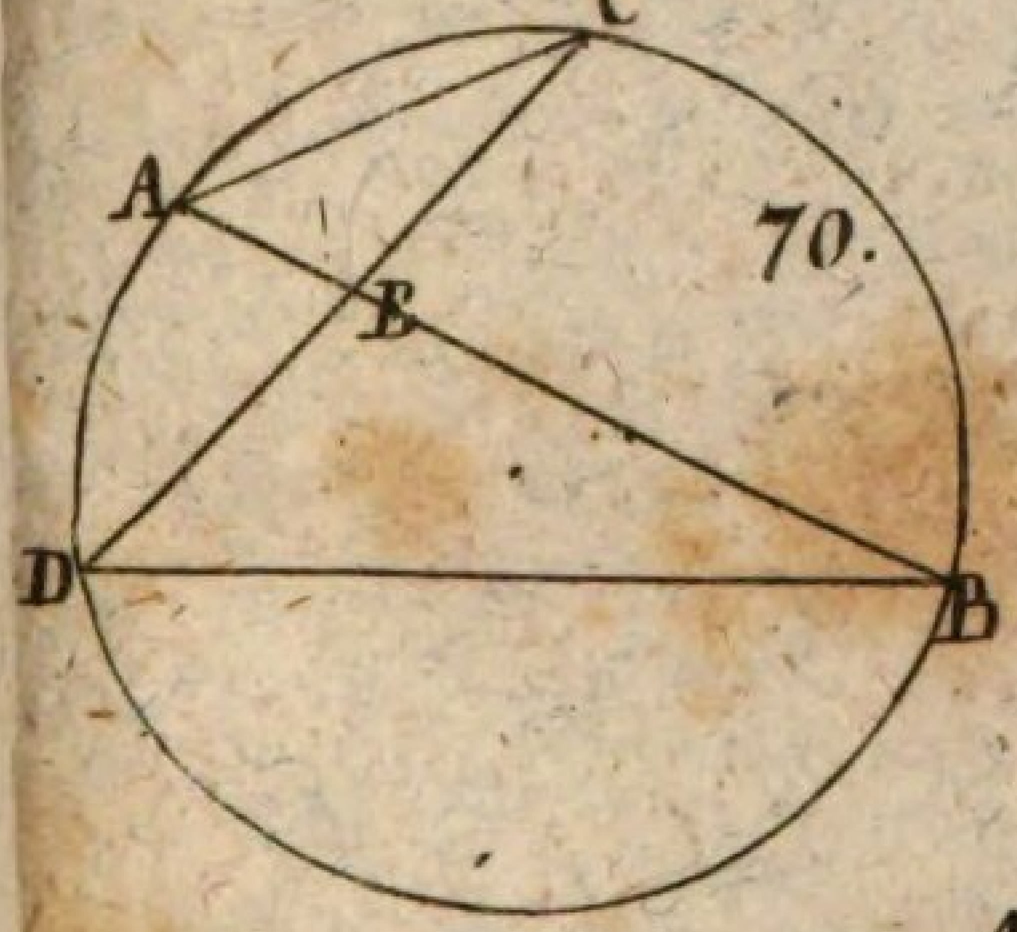
66.

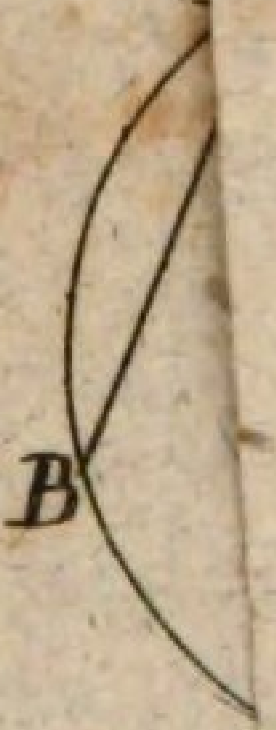


68.

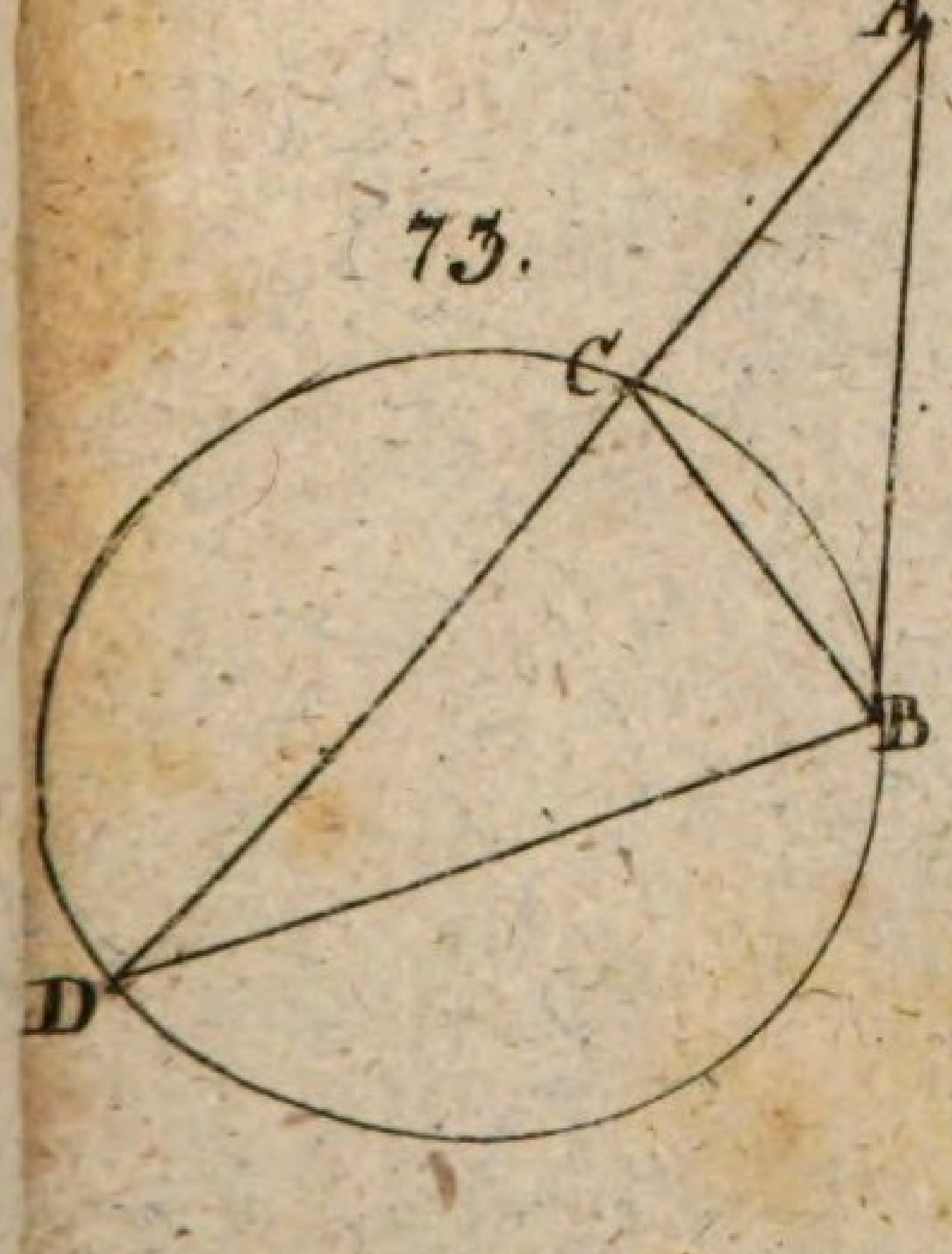


70.

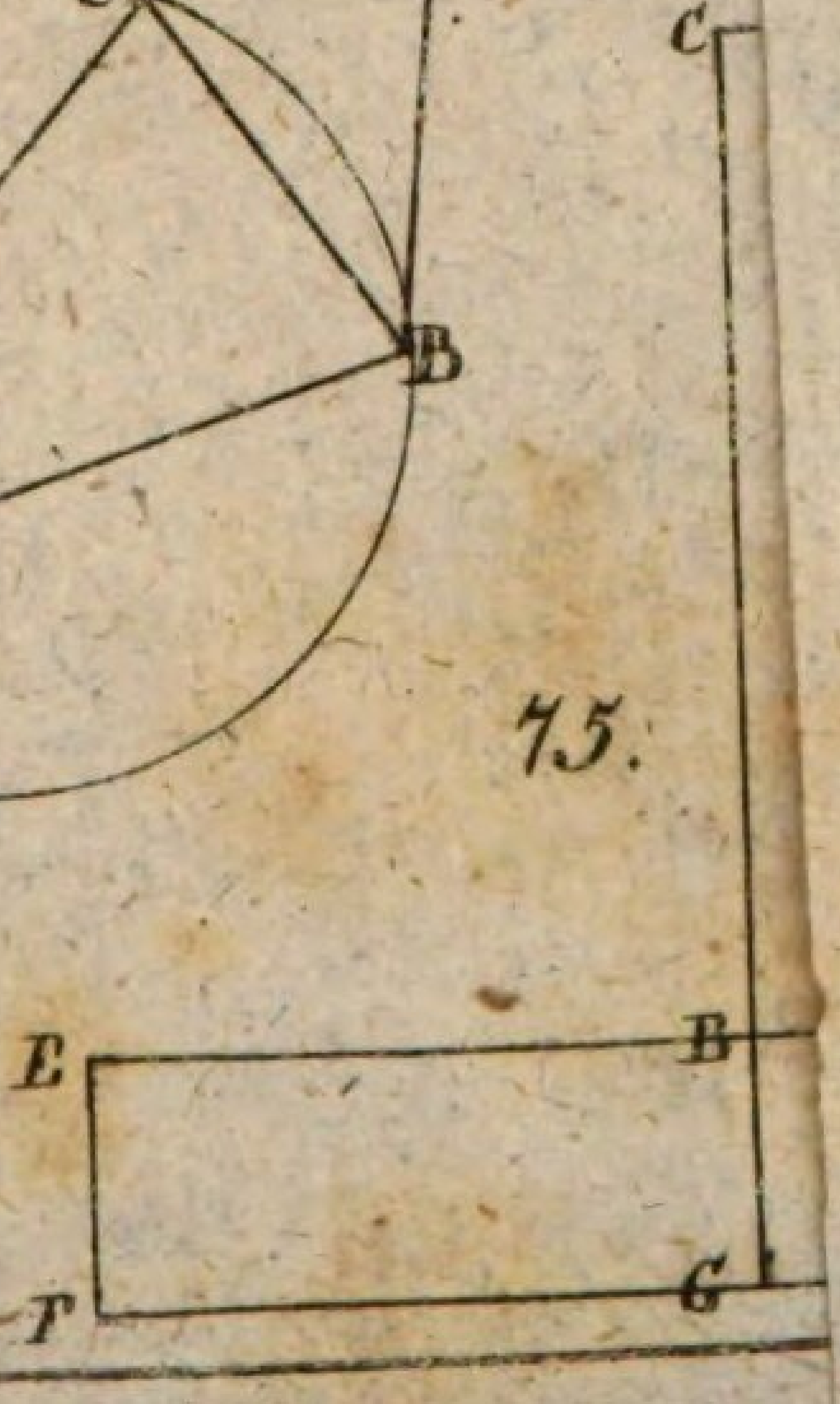




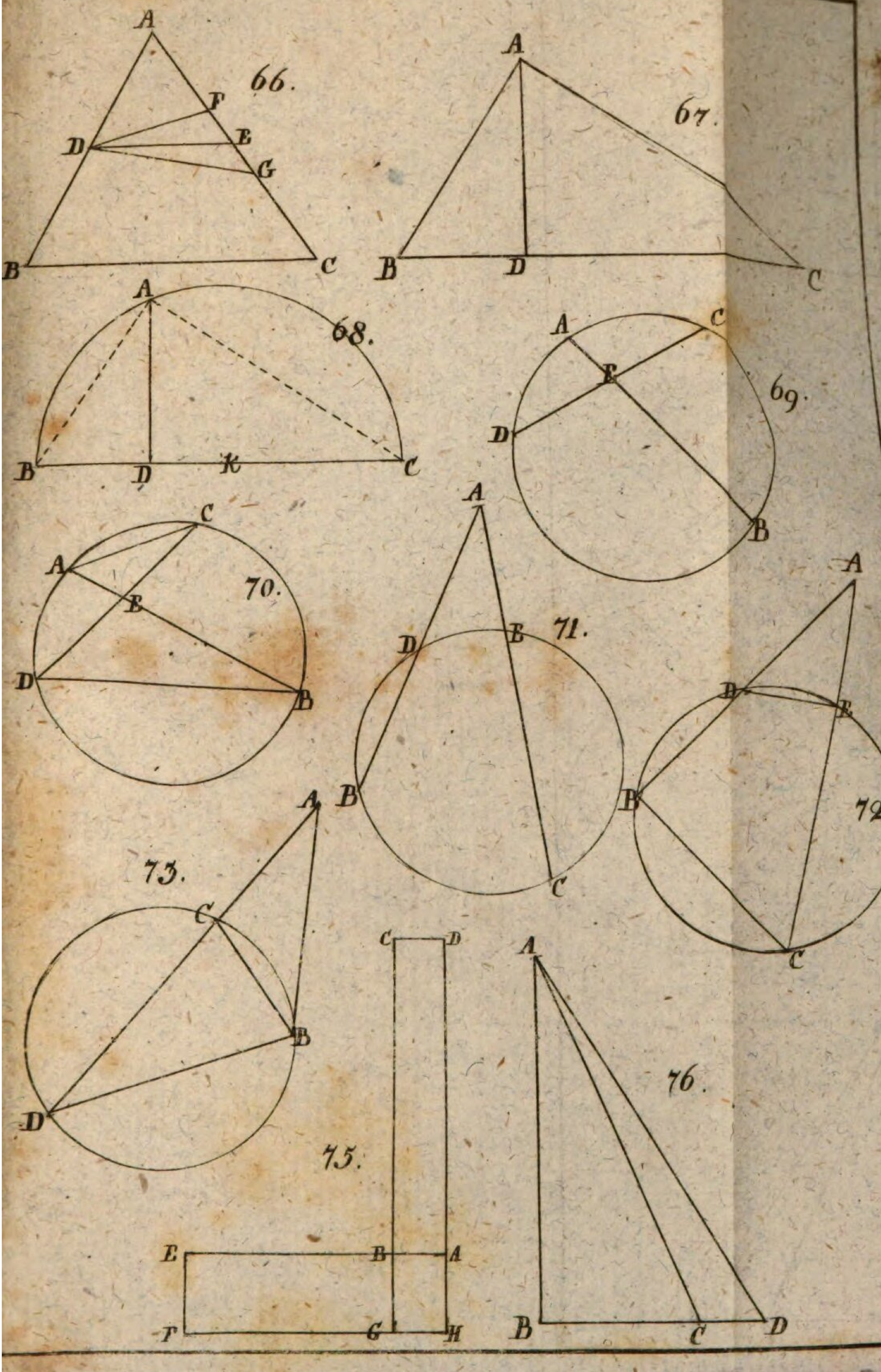
73.



75.



Tab. V.



66.
A
F
E
D
G
B
C
67.
A
B
D
C
68.
A
B
D
K
C
69.
A
C
E
D
B
70.
C
A
E
D
B
71.
A
D
E
B
C
72.
A
D
E
B
C
73.
A
C
B
D
75.
C
D
E
B
A
F
G
H
76.
A
B
C
D

48 X VI.88 II.89

23691

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian,

Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie

Bd.: [3],2

Berlin 1784

Math.p. 355 t-1/3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137682-7
VD18 90062078